

[1]

▶ 出題のねらい

- 命題を集合として捉え、正しく表現することができるか。
- 命題の逆・裏・対偶を理解し、真偽を正しく判断できるか。
- 絶対値を含む不等式を正しく解くことができるか。
- 必要条件や十分条件を理解し、正しく判断できるか。

▶ 解説

(1)

- (i) 命題「 $p \implies q$ 」が真であることは、 P が Q の部分集合であること、すなわち、

$$\underline{P \subset Q} \quad (\cdots \textcircled{0}) \quad \cdots \cdots \text{ア}$$

が成り立つことと同値である。

- (ii) 命題「 $\bar{q} \implies p$ 」の逆は、「 $p \implies \bar{q}$ 」であるから、これが真であることは、 P が $\bar{Q}$ の部分集合であること、すなわち、

$$P \subset \bar{Q}$$

が成り立つことと同値である。

また、命題の逆「 $p \implies \bar{q}$ 」とその対偶

「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」すなわち、「 $q \implies \bar{p}$ 」の真偽は一致するから、これが真であることは、 Q が $\bar{P}$ の部分集合であること、すなわち、

$$Q \subset \bar{P}$$

が成り立つことと同値である。

よって、命題「 $\bar{q} \implies p$ 」の逆が真であることと、

$$\underline{P \subset \bar{Q}} \text{ または } \underline{Q \subset \bar{P}} \quad (\cdots \textcircled{1}) \quad (\cdots \textcircled{4}) \quad \cdots \cdots \text{イ, ウ}$$

が成り立つことは同値である。

- (iii) 命題「 $(p \text{ かつ } q) \implies \bar{r}$ 」の裏は、

「 $(p \text{ かつ } q) \implies \bar{r}$ 」すなわち、

$$[(p \text{ または } q) \implies r]$$

である。

したがって、命題「 $(p \text{ かつ } q) \implies \bar{r}$ 」の裏が真であることは、 $\bar{P} \cup \bar{Q}$ が R の部分集合であること、すなわち、

$$\underline{(\bar{P} \cup \bar{Q}) \subset R} \quad (\cdots \textcircled{5}) \quad \cdots \cdots \text{エ}$$

が成り立つことと同値である。

(2)

- (i) 不等式「 $|x-2| > 2x$ 」について、

(ア) $x \geq 2$ のとき、

$$x-2 > 2x \text{ より, } x < -2$$

であるから、解はない。

(イ) $x < 2$ のとき、

$$-x+2 > 2x \text{ より, } x < \frac{2}{3}$$

であるから、解は、

$$x < \frac{2}{3}$$

である。

したがって、(ア)と(イ)より、求める解は、

$$x < \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \text{カ, キ}$$

$$(\cdots \textcircled{0}) \quad \cdots \cdots \text{オ}$$

である。

- (ii) 不等式「 $|x-2| > 1$ 」の解は、

$$x-2 < -1 \text{ または } 1 < x-2$$

より、

$$x < 1 \text{ または } 3 < x$$

である。

また、不等式「 $|x-2| > -2x$ 」について、

(ウ) $x \geq 2$ のとき、

$$x-2 > -2x \text{ より, } x > \frac{2}{3}$$

であるから、解は、

$$x \geq 2$$

である。

(エ) $x < 2$ のとき、

$$-x+2 > -2x \text{ より, } x > -2$$

であるから、解は、

$$-2 < x < 2$$

である。

したがって、(ウ)と(エ)より、「 $|x-2| > -2x$ 」の解は、

$$x > -2$$

である。

このとき、

$$P \cap R = \{x \mid -2 < x < 1 \text{ または } 3 < x\}$$

であるから、 $P \cap R$ の要素のうち、最小の自然数は、

$$\underline{4} \quad \cdots \cdots \text{ク}$$

である。

- (iii) $P = \{x \mid x < 1 \text{ または } 3 < x\}$ であるから、

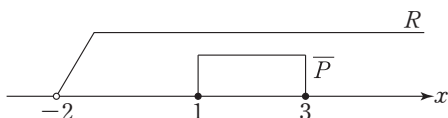
$$\bar{P} = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

である。

$R = \{x \mid x > -2\}$ より、

$$\overline{P} \subset R$$

が成り立つから、 $\overline{p}$ は r であるための
十分条件であるが、必要条件ではない。
 (……①) ……ケ



また、

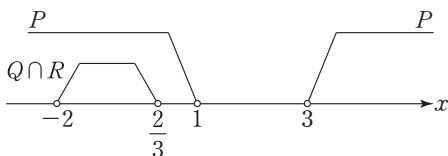
$$Q \cap R = \left\{ x \mid -2 < x < \frac{2}{3} \right\}$$

である。

したがって、

$$P \supset (Q \cap R)$$

が成り立つから、 p は $(q \text{ かつ } r)$ であるための
必要条件であるが、十分条件ではない。
 (……②) ……コ



アドバイス

命題の真偽と集合の関係

一般に、命題「 $p \implies q$ 」が真であることは、 P が Q の部分集合であること、すなわち、 $P \subset Q$ が成り立つことと同値である。このことから、命題が与えられたときに、集合を用いて表す力を培っておくとよいだろう。

また、命題とその逆の真偽を調べることによって、必要条件や十分条件の判定を行うことについても確認しておこう。

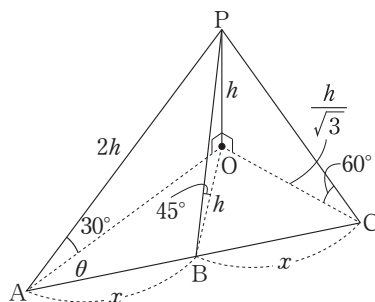
〔2〕

▶ 出題のねらい

- 三角比の定義を理解し、線分の長さを正しく表現することができるか。
- 2つの三角形において、共通する1つの角に対し余弦定理を利用することができるか。
- 仰角が最大となるのは、どのような位置であるのかを正しく判断することができるか。

▶ 解説

(1)



$$h = OA \tan 30^\circ = OB \tan 45^\circ = OC \tan 60^\circ$$

であるから、

$$OA = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h$$

$$OB = \frac{h}{\tan 45^\circ} = h$$

$$OC = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}h$$

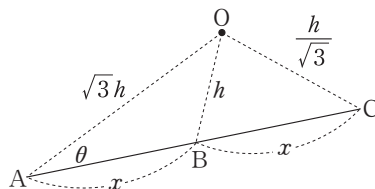
である。

すなわち、正しい組合せは、

①

……サ

(2)



△OAB に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\sqrt{3}h)^2 + x^2 - h^2}{2 \cdot \sqrt{3}h \cdot x} \\ &= \frac{2h^2 + x^2}{2\sqrt{3}hx} \quad \text{……①} \quad (\text{……②}) \quad \text{……シ} \end{aligned}$$

であり、また、△OAC に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\sqrt{3}h)^2 + (2x)^2 - \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{3}h \cdot 2x} \\ &= \frac{2h^2 + 3x^2}{3\sqrt{3}hx} \quad \text{……②} \quad (\text{……④}) \quad \text{……ス} \end{aligned}$$

である。このとき、①、②より、

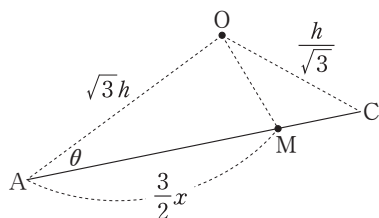
$$\begin{aligned} \frac{2h^2 + x^2}{2\sqrt{3}hx} &= \frac{2h^2 + 3x^2}{3\sqrt{3}hx} \\ 3(2h^2 + x^2) &= 2(2h^2 + 3x^2) \\ 2h^2 &= 3x^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$h = \frac{\sqrt{6}}{2}x \quad \text{……③} \quad (\text{……②}) \quad \text{……セ}$$

である。

(3)



$x=80$ のとき, ③より, タワーの高さは,

$$OP=h=\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 80=40\sqrt{6} \text{ (m)} \quad \dots\dots \text{ソタ, チ}$$

である。また, $\angle OAC=\theta$ であるから, ①(または②)より,

$$\begin{aligned} \cos \angle OAC &= \cos \theta \\ &= \frac{3x^2+x^2}{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} x \cdot x} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \dots\dots \text{④} \quad \dots\dots \text{ツ, テ, ト} \end{aligned}$$

である。さらに, $AM=\frac{3}{2}x$ であり, $\triangle OAM$ に余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned} OM^2 &= (\sqrt{3}h)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}h \cdot \frac{3}{2}x \cos \theta \\ &= 3h^2 + \frac{9}{4}x^2 - 3\sqrt{3}hx \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 3 \cdot \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} x \cdot x \\ &= \frac{3}{4}x^2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} OM &= \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 80 \\ &= 40\sqrt{3} \text{ (m)} \quad \dots\dots \text{ナニ, ヌ} \end{aligned}$$

である。また,

$$\tan \angle OMP = \frac{OP}{OM} = \frac{40\sqrt{6}}{40\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

であり,

$$1.3764 < \sqrt{2} < 1.4281$$

であるから, 三角比の表 (tan) より,

$$\underline{54^\circ} < \angle OMP < (54+1)^\circ \quad \dots\dots \text{ネノ}$$

である。

さらに, 直線 AC 上の点 Q からタワーの先端 P への仰角が最大となるのは, 点 O と直線 AC との距離が最小のとき, すなわち, 点 O から直線 AC に引いた垂線と直線 AC の交点が Q となるときである。

このとき,

$$\begin{aligned} AQ &= OA \cos \theta \\ &= \sqrt{3}h \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{④より}) \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}x \quad (\text{③より}) \\ &= 2x \\ &= AC \end{aligned}$$

であるから, 点 Q は点 C に一致する。

したがって, 仰角が最大となる点 Q は,

点 C (……①) ……ハ

である。

アドバイス

三角比の値と測量

三角比の値を求めることで, 図形における角の大きさを, 三角比の表から求めることができる。本問では, 直線 AC 上の点 Q からタワーの先端 P に対して仰角(見上げる角のこと)が最大となるのは, 点 O と直線 AC との距離が最小のときであることを判断できたかがポイントであり, $\angle OQA=90^\circ$ が成り立つような直線 AC 上の点 Q を考察すればよい。

第2問 2次関数, データの分析

[1]

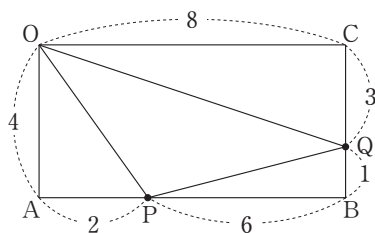
▶ 出題のねらい

- 2つの動点と t に関する条件を把握し, $\triangle OPQ$ の面積を正しく表現することができるか。
- t のとり得る値の範囲に対し, $f(t)$ のグラフを正しく表すことができるか。
- 方程式 $f(t)=k$ の実数解 t の個数を, 正しく把握することができるか。

▶ 解説

(1)

- (i) 点 P が辺 AB 上にあり, $AP=2$ のとき, $t=1$ であるから, $BQ=1$ である。



したがって、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$f(1)=32-\frac{1}{2}(4\cdot 2+6\cdot 1+3\cdot 8)$$

$$=13$$

……アイ

である。

(ii) 点 P が辺 AB 上にあるのは、

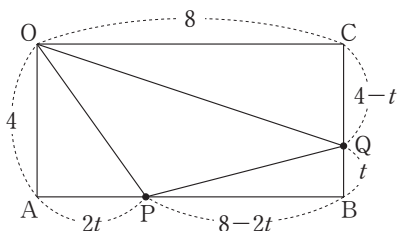
$$0\leq 2t\leq 8$$

すなわち、

$$0\leq t\leq 4$$

……ウ

のときである。



このとき、点 Q は辺 BC 上にあり、 $AP=2t$ 、 $BQ=t$ であるから、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$f(t)=32-\frac{1}{2}\{4\cdot 2t+(8-2t)t+(4-t)\cdot 8\}$$

$$=32-(4t+4t-t^2+16-4t)$$

$$=t^2-4t+16$$

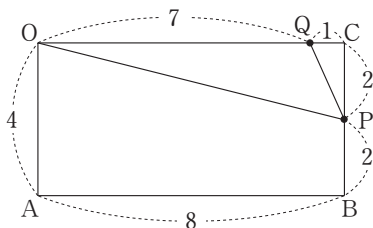
……①

(……④)

……エ

と表せる。

(2) $t=5$ のとき、点 P は辺 BC 上にあり、点 Q は辺 CO 上にある。



このとき、

$$BP=2, CQ=1$$

であるから、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$f(5)=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 2=7$$

……オ

である。

また、点 P が辺 BC 上にあるのは、

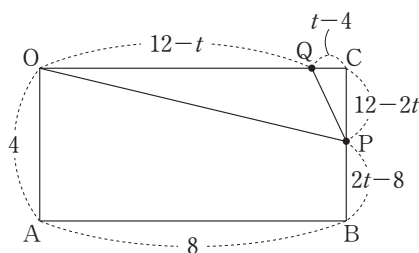
$$8\leq 2t\leq 12$$

すなわち、

$$4\leq t\leq 6$$

……カ

のときである。



このとき、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$f(t)=\frac{1}{2}(12-t)(12-2t)$$

$$=t^2-18t+72$$

……②

(……④)

……キ

と表せる。

$4\leq t\leq 6$ において、 $f(t)=13$ となるのは、

$$t^2-18t+72=13$$

$$t^2-18t+59=0$$

より、

$$t=9\pm\sqrt{9^2-59}=9\pm\sqrt{22}$$

$4<\sqrt{22}<5$ より、 $4<9-\sqrt{22}<5$ 、 $6<9+\sqrt{22}$ であるから、

$$t=9-\sqrt{22}$$

……ク、ケコ

である。

(3) t のとり得る値の範囲は、

$$0\leq 2t\leq 24$$

より、

$$0\leq t\leq 12$$

……サン

である。

この範囲において、 $f(t)=0$ となるのは 3 点 O、P、Q が同一直線上にあるとき、すなわち、点 P、Q がともに辺 OC 上にあるとき、または点 P が点 A に戻り、点 Q が点 O の位置にきたときである。

よって、

$$12\leq 2t\leq 20, 2t=24$$

すなわち、

$$6\leq t\leq 10, t=12$$

……ス、セソ

である。

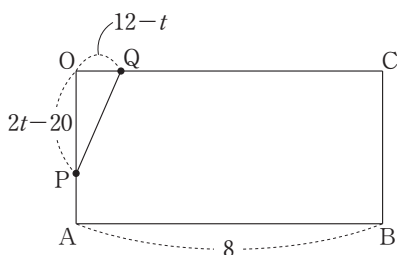
さらに、点 P が辺 OA 上にあるのは、

$$20\leq 2t\leq 24$$

すなわち、

$$10\leq t\leq 12$$

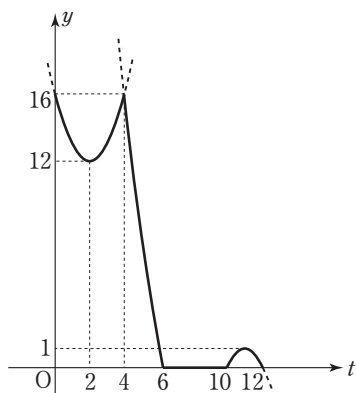
のときである。



このとき、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(2t-20)(12-t) \\ &= -t^2 + 22t - 120 \\ &= -(t-11)^2 + 1 \end{aligned}$$

である。



以上より、 $0 \leq t \leq 12$ において、 $y = f(t)$ の概形は図のようになるから、 $f(t) = k$ を満たす実数 t が3個であるような正の定数 k のとり得る値の範囲は、

$$\begin{aligned} 0 < k < 1, \quad 12 < k < 16 \\ (\cdots \textcircled{9}) \quad (\cdots \textcircled{8}) \end{aligned} \quad \cdots \text{タ, チ}$$

である。

アドバイス

動点が2つ以上ある問題

共通テストでは、動くものが2つ以上ある設定の問題も出題される。このような問題では、状況を1つずつ把握することがポイントであり、時刻 t によって場合分けを行うことからスタートすればよい。 t の範囲によって、関数が異なるから、その点に注意してグラフを描くことなどでもできるようにしておこう。

[2]

▶ 出題のねらい

- ・ヒストグラムや散布図などの読み取りが正確に行えるか。
- ・変量の変化に伴う分散、共分散、相関係数の値の変化が分かるか。

▶ 解説

- (1) 男子の朝食を毎日食べている割合の最頻値は、78%以上80%未満の階級に含まれ、同じ階級に含まれるのは第1四分位数と中央値である。

つまり、求める選択肢は、

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \quad \cdots \text{ツ, テ}$$

女子の朝食を毎日食べている割合の最大値は、82%以上84%未満の階級に含まれ、その階級の階級値は、

$$\underline{\underline{83}} \quad \cdots \text{トナ}$$

男子の朝食を毎日食べている割合の最小値は、74%以上76%未満の階級に含まれ、女子の朝食を毎日食べている割合の中央値は、76%以上78%未満の階級に含まれる。

つまり、求める選択肢は、

$$\textcircled{1} \quad \cdots \text{ニ}$$

男子の朝食を毎日食べている割合の、第1四分位数は78%以上80%未満の階級に、第3四分位数は80%以上82%未満の階級に含まれる。

割合が小数第1位まで求められていることに注意すると、男子の朝食を毎日食べている割合の四分位範囲は0.1%以上3.9%以下。

女子の朝食を毎日食べている割合の、第1四分位数は74%以上76%未満の階級に、第3四分位数は78%以上80%未満の階級に含まれる。

女子の朝食を毎日食べている割合の四分位範囲は2.1%以上5.9%以下。

つまり、求める選択肢は、

$$\underline{\underline{\textcircled{3}}} \quad \cdots \text{ヌ}$$

- (2) 三つの割合のうち、月曜日の割合の範囲が最も大きい。また、日曜日の割合、土曜日の割合はそれぞれ、

$$44 - 14 = 30\% \text{ 以上}$$

$$100 - 74 = 26\% \text{ 以下}$$

である。

つまり、(I)は正しい。

土曜日の割合が80%以下である都道府県で、日曜日の割合が32%以上34%以下のものがある。

また、日曜日の割合が32%以上34%以下のす

すべての都道府県で、月曜日の割合は 70 % 以上である。

つまり、(Ⅱ)は正しい。

以上より、求める選択肢は、

② ……ネ

$$(3) \quad z_i = \frac{100 - y_i}{100} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 47)$$

$$= 1 - \frac{y_i}{100} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

データ X , Y , Z の

平均値をそれぞれ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$

分散の値をそれぞれ V_x , V_y , V_z

とおく。

また、データ X とデータ Y , データ X とデータ Z の

共分散の値をそれぞれ $W_{x,y}$, $W_{x,z}$

相関係数の値をそれぞれ $r_{x,y}$, $r_{x,z}$

とおく。

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{47} (z_1 + z_2 + \dots + z_{47}) \\ &= \frac{1}{47} \left\{ \left(1 - \frac{y_1}{100} \right) + \left(1 - \frac{y_2}{100} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(1 - \frac{y_{47}}{100} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{47} \left\{ 47 - \frac{1}{100} (y_1 + y_2 + \dots + y_{47}) \right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{47} (y_1 + y_2 + \dots + y_{47})$$

$$= 1 - \frac{1}{100} \bar{y}$$

であり、

$$z_i - \bar{z} = \left(1 - \frac{1}{100} y_i \right) - \left(1 - \frac{1}{100} \bar{y} \right)$$

$$= -\frac{1}{100} (y_i - \bar{y})$$

$$(z_i - \bar{z})^2 = \left\{ -\frac{1}{100} (y_i - \bar{y}) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{10000} (y_i - \bar{y})^2$$

であるから、

$$V_z = \frac{1}{47} \{ (z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2 + \dots + (z_{47} - \bar{z})^2 \}$$

$$= \frac{1}{47} \left\{ \frac{1}{10000} (y_1 - \bar{y})^2 + \frac{1}{10000} (y_2 - \bar{y})^2 \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{10000} (y_{47} - \bar{y})^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{47} \{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2$$

$$+ \dots + (y_{47} - \bar{y})^2 \}$$

$$= \frac{1}{10000} V_y$$

つまり、求める選択肢は、

② ……ノ

$$(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) = -\frac{1}{100} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

であり、

$$\begin{aligned} W_{x,z} &= \frac{1}{47} \{ (x_1 - \bar{x})(z_1 - \bar{z}) + (x_2 - \bar{x})(z_2 - \bar{z}) \\ &\quad + \dots + (x_{47} - \bar{x})(z_{47} - \bar{z}) \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{47} \left\{ -\frac{1}{100} (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) \right.$$

$$\left. -\frac{1}{100} (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) \right.$$

$$\left. -\dots -\frac{1}{100} (x_{47} - \bar{x})(y_{47} - \bar{y}) \right\}$$

$$= -\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{47} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})$$

$$+ (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y})$$

$$+ \dots + (x_{47} - \bar{x})(y_{47} - \bar{y}) \}$$

$$= -\frac{1}{100} W_{x,y}$$

つまり、求める選択肢は、

⑥ ……ハ

$$r_{x,z} = \frac{W_{x,z}}{\sqrt{V_x} \sqrt{V_z}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{100} W_{x,y}}{\sqrt{V_x} \cdot \frac{1}{100} \sqrt{V_y}}$$

$$= -\frac{W_{x,y}}{\sqrt{V_x} \sqrt{V_y}}$$

$$= -r_{x,y}$$

つまり、求める選択肢は、

⑦ ……ヒ

アドバイス

様々な図の特徴の読み取り方を最終確認しよう

共通テストでも、センター試験と同様、ヒストグラム、箱ひげ図、散布図などからデータの特徴を把握する設問が出題されている。平均、分散、標準偏差などの算出の仕方と合わせ、ヒストグラム、箱ひげ図、散布図など様々な図の読み取り方を最終確認しておこう。

第3問 場合の数と確率

▶ 出題のねらい

- 与えられた仮定にもとづき、図や表を用いて正しい確率を求めることができるか。
- 確率における排反事象を理解し、余事象を利用することができるか。
- 条件付き確率や確率の乗法定理を正しく理解し、正しく計算することができるか。

▶ 解説

(1)

- (i) p は、事象 A と事象 B の積事象、すなわち、

$$\underline{A \cap B} \quad (\cdots \cdots \textcircled{1}) \quad \cdots \cdots \text{ア}$$

が起こる確率であるから、

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{20} = \frac{17}{50} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \text{イウ, エオ}$$

である。

また、 r は、事象 $\overline{A}$ と事象 B の積事象、すなわち、

$$\underline{\overline{A} \cap B} \quad (\cdots \cdots \textcircled{5}) \quad \cdots \cdots \text{カ}$$

が起こる確率であるから、

$$r = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{19}{20}\right) = \frac{3}{100} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \text{キ, クケコ}$$

である。

このとき、仮定と与えられた二つの事象および四つの確率 p, q, r, s から、次の表を考えることができる。

	迷惑メールと判定される	通常メールと判定される
迷惑メール	$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{20}$	$q = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{17}{20}\right)$
通常メール	$r = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{19}{20}\right)$	$s = \frac{3}{5} \cdot \frac{19}{20}$

したがって、送られてきた1件のメールが迷惑メールと判定される確率は、①、②より、

$$p + r = \frac{17}{50} + \frac{3}{100} = \frac{37}{100} \quad \cdots \cdots \text{サ〜ソ}$$

である。

- (ii) 会社Cに送られてきた1件のメールが、検査Kにより通常メールと判定される事象は、

$$A \cap \overline{B} \quad \text{または} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

であるから、これが起こる確率は、

$$q + s$$

である。

つまり、検査Kにより通常メールと判定されたメールが、実際には迷惑メールである条件付き確率は、

$$\frac{q}{q+s} \quad (\cdots \cdots \textcircled{6}) \quad \cdots \cdots \text{タ}$$

である。また、

$$q = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{17}{20}\right) = \frac{3}{50}, \quad s = \frac{3}{5} \cdot \frac{19}{20} = \frac{57}{100}$$

であり、さらに、

$$q + s = \frac{3}{50} + \frac{57}{100} = \frac{63}{100}$$

であるから、検査Kにより通常メールと判定されたメールが、実際には迷惑メールである条件付き確率は、

$$\frac{q}{q+s} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{63}{100}} = \frac{2}{21} \quad \cdots \cdots \text{チ, ツテ}$$

である。

(2)

- (i) 表1より、検査Lを受けた2376件のメールの中から1件のメールを選ぶとき、そのメールが部署Dに送られたものである確率は、

$$\frac{528}{2376} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 11}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 11} = \frac{2}{9} \quad \cdots \cdots \text{ト, ナ}$$

である。

- (ii) 表1より、検査Lを受けた2376件の中から1件のメールを選ぶとき、そのメールが部署Eに送られたものである確率は、

$$\frac{792}{2376} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 11}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 11} = \frac{1}{3}$$

である。また、検査Lを受けた2376件の中から1件のメールを選ぶとき、そのメールが部署Fに送られたものである確率は、

$$\frac{1056}{2376} = \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 11}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 11} = \frac{4}{9}$$

である。

したがって、検査Lを受けた2376件の中から1件のメールを選ぶとき、そのメールが広告型である確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{12} \\ &= \frac{20+12+28}{108} = \frac{5}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \cdots \cdots \text{ニ, ヌ} \end{aligned}$$

である。

- (iii) 検査Lを受けた2376件の中から1件のメールを選び、そのメールが広告型であるとき、そのメールが部署Fに送られたものである条件付き確

率は,

$$\frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{12}}{\frac{5}{9}} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} \quad \dots\dots \text{ネ, ノハ}$$

である。

- (iv) ③の余事象を考えると, 検査Lを受けた2376件のの中から1件のメールを選ぶとき, そのメールがウイルス型である確率が得られるから, その確率は,

$$\frac{4}{9}$$

である。これに対し, 表2より, 部署Eにおいて, 迷惑メールと判定された792件のメールのうち, ウイルス型のメールである確率は,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

であるから, 検査Lを受けた2376件のメールの中から1件を選び, そのメールがウイルス型であるとき, そのメールが部署Eに送られたものである条件付き確率は,

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$$

であり, この確率は,

$$\frac{1}{2} \text{ に等しい。} (\dots\dots \text{②}) \quad \dots\dots \text{ヒ}$$

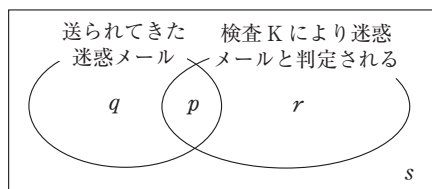
アドバイス

表や図を用いて確率を考える

ある事象の確率を求めるとき, 与えられた状況を表にしたり図にしたりすることで, 求めたい確率を視覚化して考えることができる。本問では, 例えば, 確率 p は,

$$p = (\text{「迷惑メールである」かつ「検査Kにより迷惑メールと判定される」割合})$$

であるから, ベン図を描いて考えると, どの部分の確率を求めればよいのかを, 素早く判断できる。



これにより条件付き確率の $\frac{r}{p+r}$ などとも算出できるので, 表や図の活用はできるようにしてお

きたい。

第4問 整数の性質

▶ 出題のねらい

- n 進法を正しく理解し, n 進法で表された数を表現することができるか。
- n 進法で表された数を 10 進法で表すことができるか。
- n 進法の各位で用いることができる数を理解しているか。

▶ 解説

(1)

- (i) 5 進法で表された 2 桁の数 $ab_{(5)}$ と 9 進法で表された 2 桁の数 $ba_{(9)}$ が等しいから,

$$5a + b = 9b + a$$

すなわち,

$$a = \underline{\underline{2b}} \quad \dots\dots \text{①} \quad \dots\dots \text{ア}$$

が成り立つ。

ここで, 2 桁の数 $ab_{(5)}$, $ba_{(9)}$ はそれぞれ 5 進法, 9 進法で表されているから, 1 桁の自然数 a , b のとり得る値の範囲は,

$$\underline{\underline{1}} \leq a \leq \underline{\underline{4}}, \quad 1 \leq b \leq 4 \quad \dots\dots \text{②} \quad \dots\dots \text{イ, ウ}$$

であり, ①と②を同時に満たす自然数 a , b は,

$$a = \underline{\underline{2}}, \quad b = \underline{\underline{1}} \quad \text{または} \quad a = \underline{\underline{4}}, \quad b = \underline{\underline{2}} \quad \dots\dots \text{エ, オ, カ, キ}$$

である。

このとき, $21_{(5)}$ を 10 進法で表すと,

$$M = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

であり, $42_{(5)}$ を 10 進法で表すと,

$$N = 4 \cdot 5 + 2 = 22$$

であるから, 2つの数 M , N の最大公約数は,

$$\underline{\underline{11}} \quad \dots\dots \text{クケ}$$

である。

- (ii) $a=2$, $b=1$ とする。 l 進法で表された 2 桁の数 $21_{(l)}$ と m 進法で表された 2 桁の数 $12_{(m)}$ が等しいとき,

$$2l + 1 = m + 2$$

すなわち,

$$m = 2l - 1$$

である。また, 用いられている各桁の数が 1, 2 であり, しかも, l , m は 1 桁の自然数であるから, l , m はともに 3 以上 9 以下の自然数である。したがって,

$l=3$ のとき, $m=5$ であり,
 いずれも 1 桁の自然数であるから適する。
 $l=4$ のとき, $m=7$ であり,
 いずれも 1 桁の自然数であるから適する。
 $l=5$ のとき, $m=9$ であり,
 いずれも 1 桁の自然数であるから適する。
 $l \geq 6$ のとき, $m \geq 11$ より,
 m は 1 桁の自然数でないから不適。

以上より, l, m の組について, 選択肢の中で正しい組は,

$$(l, m) = (\underline{3}, \underline{5}), (\underline{4}, \underline{7}) \quad (\cdots \cdots \underline{1}) \quad (\cdots \cdots \underline{4}) \quad \cdots \cdots \text{コ, サ}$$

である。

(2)

(i) $xyz_{(n)}, zyx_{(n+1)}$ はそれぞれ,

$$xyz_{(n)} = xn^2 + yn + z, \\ zyx_{(n+1)} = z(n+1)^2 + y(n+1) + x$$

と表せ, 条件より,

$$xn^2 + yn + z = z(n+1)^2 + y(n+1) + x \\ = zn^2 + (2z+y)n + x + y + z$$

すなわち,

$$x + y = n\{(x-z)n - 2z\} \quad \cdots \cdots \text{③} \quad \cdots \cdots \text{ス} \\ (\cdots \cdots \underline{4}) \quad \cdots \cdots \text{シ}$$

が成り立つ。

ここで, $xyz_{(n)}, zyx_{(n+1)}$ はそれぞれ n 進法, $n+1$ 進法で表され, いずれも 3 桁で最高位の数は 0 ではないから,

$$\underline{1} \leq x \leq \underline{n-1}, \quad \underline{0} \leq y \leq \underline{n-1}, \quad \underline{1} \leq z \leq \underline{n-1} \quad \cdots \cdots \text{④} \\ (\cdots \cdots \underline{1}) \quad (\cdots \cdots \underline{2}) \quad (\cdots \cdots \underline{0}) \quad (\cdots \cdots \underline{2}) \\ (\cdots \cdots \underline{1}) \quad (\cdots \cdots \underline{2}) \quad \cdots \cdots \text{セ} \sim \text{テ}$$

である。このとき, ④より,

$$1 \leq x + y \leq 2(n-1) < 2n$$

であり, また, ③より $x+y$ は n の倍数であるから,

$$x + y = \underline{n} \quad (\cdots \cdots \underline{1}) \quad \cdots \cdots \text{ト}$$

$$\text{かつ} \quad (x-z)n - 2z = \underline{1} \quad \cdots \cdots \text{⑤} \quad \cdots \cdots \text{ナ}$$

である。

さらに, ⑤を,

$$2z + 1 = (x-z)n \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$

と変形すると, ④より,

$$3 \leq 2z + 1 \leq 2n - 1 < 2n$$

であり, また, $2z+1$ は n の倍数であるから, ⑥より,

$$2z + 1 = \underline{n} \quad \text{かつ} \quad x - z = \underline{1} \quad \cdots \cdots \text{⑦} \quad \cdots \cdots \text{ヌ} \\ (\cdots \cdots \underline{1}) \quad \cdots \cdots \text{ニ}$$

である。

これより, $n = 2z + 1$ であるから, ④より, n の最小値は,

$$n = 3$$

である。

このとき, ⑤, ⑦より,

$$x + y = 3, \quad 2z + 1 = 3, \quad x - z = 1$$

すなわち,

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 1$$

であるから,

$$xyz_{(3)} = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1 = \underline{22} \quad \cdots \cdots \text{ネノ}$$

である。

(ii) ⑤, ⑦を満たす x, y, z は,

$$x + y = n, \quad 2z + 1 = n, \quad x - z = 1$$

より,

$$x = \frac{n+1}{2}, \quad y = \frac{n-1}{2}, \quad z = \frac{n-1}{2} \quad \cdots \cdots \text{⑧}$$

と表せる。

(a) について: 1 つの n を決めると, x, y, z はそれぞれ 1 つに定まるから, 3 桁の数 $xyz_{(n)}$ が 2 個以上存在することはない。

(b) について: n が偶数であるとき, ⑧より, x, y, z はいずれも整数とならないので, 3 桁の数 $xyz_{(n)}$ は存在しない。

(c) について: $n=5$ のとき, ⑧より,

$$x = 3, \quad y = 2, \quad z = 2$$

である。

3 桁の数 $xyz_{(n)}$ を 10 進法で表すと,

$$322_{(5)} = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2 = 87 = 3 \cdot 29$$

であり, これは 3 または 29 を因数にもつから素数ではない。

以上より,

$$(a) \text{ 誤}, (b) \text{ 正}, (c) \text{ 誤} \quad (\cdots \cdots \underline{5}) \quad \cdots \cdots \text{ハ}$$

である。

アドバイス

与えられた条件を立式し, 整数を絞り込む

本問は, 整数の 10 進法以外の表現と合わせ, その中で成り立つ条件, すなわち, 方程式や不等式を立式して, すべての条件を満たす数の性質を考察させる問題である。 n 進法の各位のとり得る数に注意して範囲を絞る方法は必ず振り返っておこう。

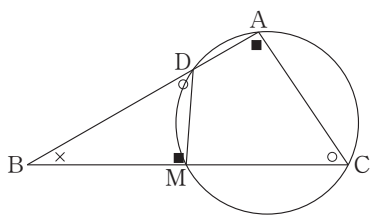
第5問 図形の性質

▶ 出題のねらい

- 円に内接する四角形に対し、方べきの定理を用いることができるか。逆に、方べきの定理の逆を利用し、4点が同一円周上に存在することを判断することができるか。
- メネラウスの定理を用いて、線分の長さを正しく求めることができるか。

▶ 解説

(1)



方べきの定理より、

$$BD \cdot BA = BM \cdot BC \quad (\dots\dots \textcircled{4}) \quad \dots\dots \text{ア}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{したがって、} \\ 9BD = 6 \cdot 12 \end{aligned}$$

より、

$$BD = \underline{\underline{8}} \quad \dots\dots \text{イ}$$

である。

また、四角形 ADMC は円 O に内接するから、
 $\angle BAC = \angle BMD$, $\angle BCA = \angle BDM$

であり、

$$\triangle ABC \sim \triangle MBD \quad (\dots\dots \textcircled{5}) \quad \dots\dots \text{ウ}$$

である。

これより、

$$BA : BM = CA : DM$$

が成り立つから、

$$DM = \frac{BM \cdot CA}{BA} = \frac{6 \cdot 5}{9} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}} \quad \dots\dots \text{エオ, カ}$$

である。

さらに、 $\triangle ADM$ の面積を S とするとき、

$$AD : AB = 1 : 9$$

より、

$$\triangle ABM = 9\triangle ADM = 9S$$

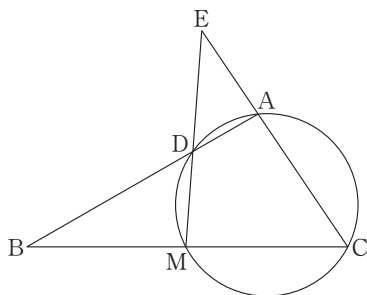
であり、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= 2\triangle ABM \\ &= 2 \cdot 9S \\ &= \underline{\underline{18S}} \quad \dots\dots \text{キク} \end{aligned}$$

である。

(2)

(i)



$\triangle ABC$ と直線 EM について、メネラウスの定理より、

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{CE}{EA} &= 1 \\ \frac{CE}{EA} &= \underline{\underline{8}} \quad \dots\dots \text{ケ} \end{aligned}$$

であり、 $CE = EA + AC$ より、

$$\begin{aligned} EA + 5 &= 8EA \\ EA &= \underline{\underline{\frac{5}{7}}} \quad \dots\dots \text{コ, サ} \end{aligned}$$

である。

(ii) 方針 1 は、 $\triangle EMC$ と直線 AB について、メネラウスの定理より、

$$\frac{CA}{AE} \cdot \frac{ED}{DM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{シ}$$

が成り立つことを用いる。

一方、方針 2 は、

$$\text{方べきの定理} \quad (\dots\dots \textcircled{3}) \quad \dots\dots \text{ス}$$

より、

$$ED \cdot EM = EA \cdot EC$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} DE \cdot ME &= \frac{5}{7} \left(\frac{5}{7} + 5 \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{200}{49}}} \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{セ〜ツ} \end{aligned}$$

であり、これに $ME = MD + DE$ を用いる。

ここで、方針 1 において、①より、

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{DE}{\frac{10}{3}} \cdot \frac{6}{12} = 1$$

であるから、

$$DE = \frac{20}{21} \quad \cdots \cdots \text{テト, ナニ}$$

である。

また、**方針 2**において、 $ME = MD + DE$ であるから、 $DE = x$ とおくと、②より、

$$x \left(x + \frac{10}{3} \right) = \frac{200}{49}$$

であり、これを変形すると、

$$\left(x + \frac{5}{3} \right)^2 = \frac{25 \cdot 121}{49 \cdot 9}$$

となる。このとき、 $x > 0$ であるから、

$$x + \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 3}$$

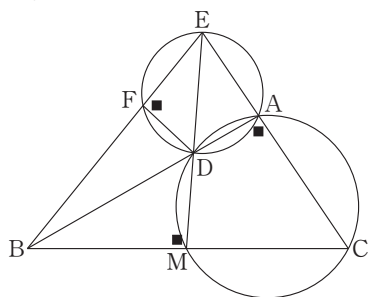
より、

$$x = DE = \frac{20}{21} \quad \cdots \cdots \text{テト, ナニ}$$

である。

(iii)

(a)について：



四角形 AEFD は円に内接するから、

$$\angle EFD = \angle DAC \quad \cdots \cdots \text{③}$$

である。また、円 O において、

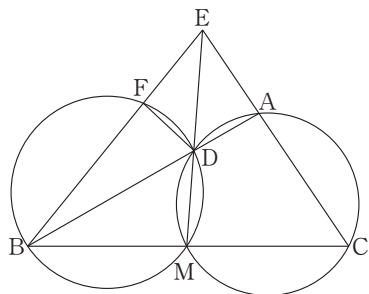
$$\angle DAC = \angle DMB \quad \cdots \cdots \text{④}$$

である。したがって、③と④より、

$$\angle EFD = \angle DMB$$

が成り立ち、四角形 BMDF において、対角の和が 180° であるから、4 点 B, M, D, F は同一円周上に存在し、点 F は $\triangle BMD$ の外接円の周上に存在する。

(b)について：



四角形 BMDF は円に内接するから、方べき

の定理より、

$$EF \cdot EB = ED \cdot EM \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

が成り立つ。また、円 O について、方べきの定理より、

$$EA \cdot EC = ED \cdot EM \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$

が成り立つ。

したがって、⑤と⑥より、

$$EF \cdot EB = EA \cdot EC$$

であるから、方べきの定理の逆より、

4 点 F, B, C, A は同一円周上に存在し、

点 F は $\triangle ABC$ の外接円の周上に存在する。

(c)について：

(b)より、点 F は $\triangle ABC$ の外接円の周上に存在し、点 D はこの円の内部に存在する点である。

よって、

$$\angle BFC < \angle BDC$$

であり、点 F は $\triangle BCD$ の外接円の周上に存在しない。

以上より、

(a) 正, (b) 正, (c) 誤 (……①) ……又

である。

アドバイス

4 点が同一円周にあるための条件

本問における(2)(iii)では、三角形の外接円の周上に点 F が存在するかどうかを判断できるかが問われているが、それを解決するには、方べきの定理の逆を用いたり、対角の和が 180° であるような四角形を見出した上で、4 点が同一円周上に存在するかどうかを判断すればよい。

共通テストでは、定理を活用するばかりではなく、その逆が成り立つことを利用して、図形の性質を考察するような問題も出題されている。今一度、教科書に掲載されている基本的な定理の逆についても確認しておこう。