

第1問 三角関数、指数・対数関数

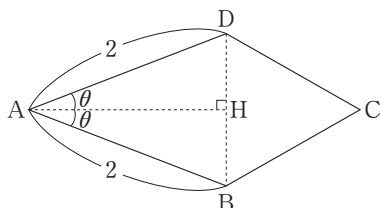
[1]

▶ 出題のねらい

- 2倍角の公式、合成を用いて三角関数の式変形ができるか。
- 三角関数の式からグラフの概形がわかるか。

▶ 解説

(1)



△ABDの面積は、上図より、

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 2\theta \\ &= 2 \sin 2\theta \quad (\cdots \cdots \text{㉔}) \quad \cdots \cdots \text{ア}\end{aligned}$$

と表せる。

△ABH ≡ △ADH であるから、

$$BH = DH = 2 \sin \theta \quad (\cdots \cdots \text{㉕}) \quad \cdots \cdots \text{イ}$$

であり、

$$BD = 2 \cdot 2 \sin \theta = 4 \sin \theta$$

より、正三角形 BCD の面積は、

$$\begin{aligned}\triangle BCD &= \frac{1}{2} \cdot (4 \sin \theta)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 4\sqrt{3} \sin^2 \theta \quad \cdots \cdots \text{ウ, エ}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= 2 \sin 2\theta + 4\sqrt{3} \sin^2 \theta \\ &= 2 \sin 2\theta + 4\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 2(\sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta) + 2\sqrt{3} \\ &= 2 \cdot 2 \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) + 2\sqrt{3} \\ &= 4 \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) + 2\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \text{カ, キ} \\ &\quad (\cdots \cdots \text{㉖}) \quad \cdots \cdots \text{オ}\end{aligned}$$

ここで、∠BAD について、 $0 < 2\theta < \pi$ より、

$$-\frac{\pi}{3} < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$$

である。よって、Sは、

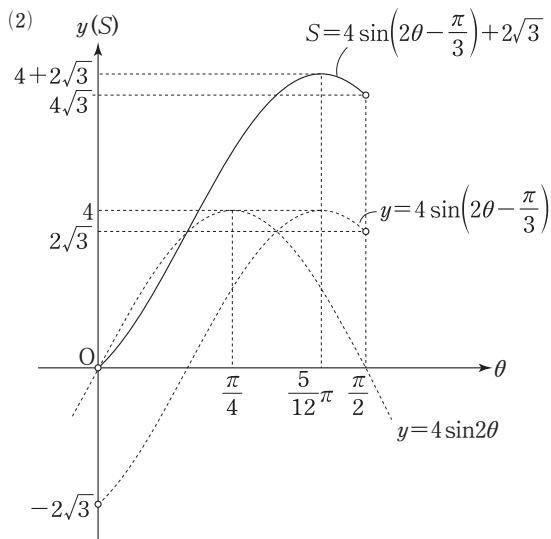
$$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{5}{12}\pi \quad (\cdots \cdots \text{㉗}) \quad \cdots \cdots \text{ク}$$

のとき、最大値

$$\underline{\underline{4 + 2\sqrt{3}}} \quad \cdots \cdots \text{ケ～サ}$$

をとる。



θとSの関係を表したグラフは上図のようになるので、

$$\text{㉘} \quad \cdots \cdots \text{シ}$$

である。

これより、 $S = k$ を満たす θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に2個あるような k の値の範囲は、

$$\underline{\underline{4\sqrt{3} < k < 4 + 2\sqrt{3}}} \quad (\cdots \cdots \text{㉙}) \quad \cdots \cdots \text{ス}$$

である。

アドバイス

三角関数の合成

a, b を定数として、 $a \sin \theta + b \cos \theta \cdots \cdots (*)$ は、

$$\begin{aligned}a \sin \theta + b \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \\ \left(\sin \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)\end{aligned}$$

と合成できる。合成の式変形に自信がない人はポイントを絞って問題演習をし、確実に式変形できるようにしよう。合成を行う際に注意してほしいことは、(*)において同じ角度 θ についての正弦と余弦の和だということである。 $\sin x + \sqrt{3} \cos y$ のような式では上の合成は適用できない。設問オにおいても、 $\sin^2 \theta$ に半角の公式を用いるのは、

2θ の正弦と余弦をつくるためである。公式が適用できる条件に注意しよう。

〔2〕

▶ 出題のねらい

- 対数で表された数の大小を比較できるか。また、符号を調べることができるか。
- 底の変換ができるか。

▶ 解説

(1) $11^2 < 2^7$ を同値変形すると、

$$\log_2 11^2 < \log_2 2^7$$

$$2 \log_2 11 < 7 \log_2 2$$

$$2x < 7$$

$$x < \frac{7}{2} = \underline{\underline{3.5}} \quad \cdots \cdots \text{セ, ソ}$$

である。

また、 $11^5 > 2^{17}$ を同値変形すると、

$$\log_2 11^5 > \log_2 2^{17}$$

$$5 \log_2 11 > 17 \log_2 2$$

$$5x > 17$$

$$x > \frac{17}{5} = \underline{\underline{3.4}} \quad \cdots \cdots \text{タ, チ}$$

である。

したがって、

$$3.4 < x < 3.5$$

より、 x の整数部分は、

$$\underline{\underline{3}} \quad \cdots \cdots \text{ツ}$$

であり、 x を小数で表したときの小数第 1 位の数字は、

$$\underline{\underline{4}} \quad \cdots \cdots \text{テ}$$

である。

(2) $y = \log_{20} 110$

$$= \frac{\log_2 110}{\log_2 20}$$

$$= \frac{\log_2 11 \cdot 10}{\log_2 2 \cdot 10}$$

$$= \frac{\log_2 11 + \log_2 10}{\log_2 2 + \log_2 10}$$

$$= \frac{x + \log_2 10}{1 + \log_2 10} \quad \cdots \cdots \text{トナ, ニ}$$

より、

$$x - y = x - \frac{x + \log_2 10}{1 + \log_2 10}$$

$$= \frac{(x-1)\log_2 10}{1 + \log_2 10}$$

であり、 $x = \log_2 11 > 1$ 、 $\log_2 10 > 0$ より、

$$x - y > 0$$

$$\underline{\underline{x > y}} \quad (\cdots \cdots \text{①}) \quad \cdots \cdots \text{又}$$

が成り立つ。

また、 $y = \log_{20} 110 > 0$ であり、 $z = \log_{0.2} 1.1$ に関しては、底が 1 より小さく、真数が 1 より大きいから、 $z < 0$ である。よって、

$$z < 0 < y < x$$

より、

$$\underline{\underline{z < y < x}} \quad (\cdots \cdots \text{⑤}) \quad \cdots \cdots \text{ネ}$$

(3) 一般に、 $p > 0$ 、 $q > 0$ 、 $p \neq 1$ 、 $q \neq 1$ のとき、

$$\log_p q = \frac{\log_q q}{\log_q p} = \frac{1}{\log_q p}$$

が成り立つから、

$$a = \frac{1}{x}, \quad b = \frac{1}{y}, \quad c = \frac{1}{z}$$

である。

$$0 < y < x \text{ より、}$$

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

すなわち、

$$0 < a < b$$

であり、 $z < 0$ より、

$$c = \frac{1}{z} < 0$$

である。

以上より、

$$c < 0 < a < b$$

すなわち、

$$\underline{\underline{c < a < b}} \quad (\cdots \cdots \text{④}) \quad \cdots \cdots \text{ノ}$$

である。

アドバイス

対数の大小比較

対数を用いて表された数の大小を比較するとき次のことに注意しよう。

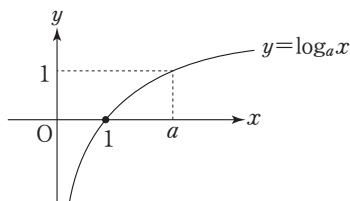
底を統一して、真数を比べればよい。

底が 1 より小さいときは、真数の大小と対数の大小が逆になることに注意しよう。

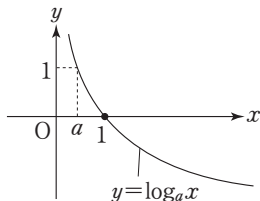
また、0 や 1 との大小も重要である。グラフをイメージすると理解しやすい。

$$\bullet a > 1 \text{ のとき } \log_a x > 0 \iff x > 1$$

$$\log_a x > 1 \iff x > a$$



$$\begin{aligned} \bullet 0 < a < 1 \text{ のとき } \log_a x > 0 &\iff 0 < x < 1 \\ \log_a x > 1 &\iff 0 < x < a \end{aligned}$$



第2問 微分法・積分法

▶ 出題のねらい

- 定積分で表された関数を扱うことができるか。
- ある1点から曲線に引いた接線の方程式と接点の座標を求めることができるか。

▶ 解説

$$(x-d)g(x) = \int_d^x f(t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) $f(x) = x$, $d = 2$ のとき, ①の右辺は,

$$\begin{aligned} \int_2^x t dt &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_2^x \\ &= \frac{x^2 - 4}{2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{2} \end{aligned}$$

であるから, ①は,

$$(x-2)g(x) = (x-2) \cdot \frac{x+2}{2}$$

である。 $g(x)$ は整式であるから,

$$g(x) = \frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{ア} \sim \textcircled{ウ}$$

である。

また, $f(x) = x^2$, $d = 6$ のとき, ①の右辺は,

$$\begin{aligned} \int_6^x t^2 dt &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_6^x \\ &= \frac{x^3 - 6^3}{3} \\ &= \frac{(x-6)(x^2 + 6x + 36)}{3} \end{aligned}$$

であるから, ①は,

$$(x-6)g(x) = (x-6) \cdot \frac{x^2 + 6x + 36}{3}$$

である。 $g(x)$ は整式であるから,

$$g(x) = \frac{x^2 + 6x + 36}{3} = \frac{1}{3}x^2 + \underline{2}x + \underline{12} \quad \cdots \cdots \textcircled{エ} \sim \textcircled{ク}$$

である。

(2) ①の右辺は x の $n+1$ 次式であり,

$$\int_d^x f(t) dt = \underline{0} \quad \text{および} \quad \text{因数定理} \quad (\cdots \cdots \textcircled{2})$$

……ケ, コ

より, $x-d$ を因数にもつ。

すなわち,

$$\int_d^x f(t) dt = (x-d)g_0(x)$$

を満たす整式 $g_0(x)$ がただ一つあり, $g_0(x)$ の次数は n である。

このとき, ①より,

$$(x-d)g(x) = (x-d)g_0(x)$$

であり, $g(x)$ は整式であるから,

$$g(x) = g_0(x)$$

である。よって, $f(x)$ と d に対して $g(x)$ がただ一つに決まることがわかり, $g(x)$ の次数について,

$$\text{つねに } n \text{ である} \quad (\cdots \cdots \textcircled{1}) \quad \cdots \cdots \textcircled{サ}$$

といえる。

(3) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$d = 1$ のとき, ①の右辺は,

$$\begin{aligned} \int_1^x (at^2 + bt + c) dt &= \left[\frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{2} t^2 + ct \right]_1^x \\ &= \frac{a}{3}(x^3 - 1) + \frac{b}{2}(x^2 - 1) + c(x - 1) \\ &= (x-1) \left\{ \frac{a}{3}(x^2 + x + 1) + \frac{b}{2}(x+1) + c \right\} \\ &= (x-1) \left\{ \frac{a}{3}x^2 + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right)x + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \right\} \end{aligned}$$

であるから, ①を満たす $g(x)$ は, これまでと同様にして,

$$g(x) = \frac{a}{3}x^2 + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right)x + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \quad \cdots \cdots \textcircled{シ}, \textcircled{ス}$$

である。

$f(x) = 0$ は,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であり, $g(x) = 0$ は,

$$ax^2 + \left(a + \frac{3}{2}b\right)x + a + \frac{3}{2}b + 3c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。

②と③の x^2 の係数がどちらも a であるので、②と③の解がすべて一致するのは、

$$b = a + \frac{3}{2}b, \quad c = a + \frac{3}{2}b + 3c$$

のときである。これより、

$$b = -2a \quad (\cdots \cdots \textcircled{3}) \quad \cdots \cdots \text{セ}$$

であり、

$$c = a - 3a + 3c$$

$$c = a \quad (\cdots \cdots \textcircled{4}) \quad \cdots \cdots \text{ソ}$$

であるから、

$$f(x) = ax^2 - 2ax + a = a(x-1)^2$$

となる。 $a \neq 0$ に注意すると、 $f(x) = 0$ は、

$$\text{重解をもつ。} \quad (\cdots \cdots \textcircled{1}) \quad \cdots \cdots \text{タ}$$

(重解は $x=1$ である)

$$(4) \quad f(x) = ax^2 - 2ax + a = a(x-1)^2$$

より、

$$h(x) = \int_1^x (at^2 - 2at + a) dt$$

$$= a \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + t \right]_1^x$$

$$= a \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} + 1 - 1 \right)$$

$$= \frac{a}{3} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$= \frac{a}{3} (x-1)^3$$

である。

接点の x 座標を s とすると、

$$h'(x) = f(x) = a(x-1)^2$$

より、接線の方程式は、

$$y - \frac{a}{3}(s-1)^3 = a(s-1)^2(x-s) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

であるから、④が $P(3, 0)$ を通ることから、

$$-\frac{a}{3}(s-1)^3 = a(s-1)^2(3-s)$$

$$(s-1)^3 + 3(s-1)^2(3-s) = 0 \quad (a \neq 0 \text{ より})$$

$$(s-1)^2\{(s-1) + 3(3-s)\} = 0$$

$$(s-1)^2(-2s+8) = 0$$

$$s = 1, 4$$

である。

$$h(1) = 0, \quad h(4) = \frac{a}{3} \cdot 3^3 = 9a$$

であるから、接点は、

$$A(\underline{1}, \underline{0}), \quad B(\underline{4}, \underline{9a}) \quad \cdots \cdots \text{チ} \sim \text{ト}$$

である。点Bにおける $y=h(x)$ の接線の方程式は、

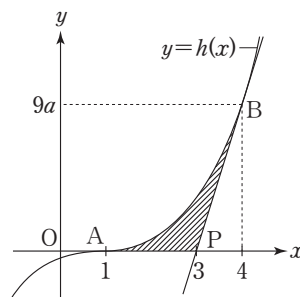
④で $s=4$ とすることにより、

$$y - 9a = 9a(x - 4)$$

$$y = \underline{9a(x - 4)} \quad \cdots \cdots \text{ナ, ニ}$$

である。

以上より、 $a > 0$ に注意すると、下図のようになる。



よって、求める面積を S とすると、

$$S = \int_1^4 \frac{a}{3} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9a$$

$$= \frac{a}{3} \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \right]_1^4 - \frac{9}{2}a$$

$$= \frac{a}{3} \cdot \frac{81}{4} - \frac{9}{2}a$$

$$= \underline{\underline{\frac{9}{4}a}}} \quad \cdots \cdots \text{ヌ, ネ}$$

である。

(注1) 本問において、「 $g(x)$ が整式である」という条件がない場合、 $g(x)$ は一意には定まらない。

実際、例えば、 $f(x) = x$ 、 $d=2$ のとき、(1)で調べたように、

$$(x-2)g(x) = (x-2) \cdot \frac{x+2}{2}$$

であるから、 $x=2$ に対しては、

$$0 \cdot g(2) = 0$$

となって、 $g(2)$ は任意の定数の値をとり得る。

$x \neq 2$ に対しては、

$$g(x) = \frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}x + 1$$

と一意に決まる。 $x=2$ の場合、 k を任意の定数として

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ k & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が求めるものとなる。

(注2) 一般に、自然数 m に対して、

$$\{(x-d)^m\}' = m(x-d)^{m-1}$$

$$\int (x-d)^m dx = \frac{1}{m+1} (x-d)^{m+1} + C$$

(C は積分定数)

が成り立つ。このことを用いると、(4)の計算を要領良く進めることができる。

$$f(x) = a(x-1)^2$$

より、

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_1^x a(t-1)^2 dt \\ &= a \left[\frac{1}{3} (t-1)^3 \right]_1^x \\ &= \frac{a}{3} (x-1)^3 \end{aligned}$$

と求める。接点の x 座標を s とすると、

$$h'(x) = \left\{ \frac{a}{3} (x-1)^3 \right\}' = a(x-1)^2$$

より、接線の方程式は④となる。

以下、解答と同様にして、 $s=1, 4$

すなわち、

$$A(1, 0), B(4, 9a)$$

を得る。

求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \frac{a}{3} (x-1)^3 dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9a \\ &= \frac{a}{3} \left[\frac{1}{4} (x-1)^4 \right]_1^4 - \frac{9}{2} a \\ &= \frac{a}{3} \cdot \frac{81}{4} - \frac{9}{2} a \\ &= \frac{9}{4} a \end{aligned}$$

となって、代入計算が容易である。

アドバイス

定積分で表された関数 $\int_a^x f(t) dt$

本問の中心は、 $\int_a^x f(t) dt$ の形で表された関数である。

n を自然数として、 $f(x)$ が x の n 次の整式で表される関数のとき、 $\int_a^x f(t) dt$ は x の $(n+1)$ 次の整式で表される。定積分の形をしていると、どのような関数かつかみにくいが、実際に積分を計算してみれば、2次式、3次式といった見慣れた式であると分かるだろう。また、 $h(x) = \int_a^x f(t) dt$ のとき、 $h'(x) = f(x)$ であることも、ぜひ確認しておきたい重要事項である。

第3問 確率分布と統計的推測

▶ 出題のねらい

- アンケート調査の結果から、母比率を推定する考え方を理解しているか。
- 母平均の推定を行うときに、信頼区間の幅を一定以下になるような標本の大きさを求められるか。

▶ 解説

この調査において、母集団は、

この自治体の15歳以上50歳未満の住民全体
(……②)

……ア

であり、標本の大きさは、

600 (……③)

……イ

である。

- (1) 母集団は10万人以上いて、10万は標本の大きさ600に比べて十分大きいので、抽出は復元抽出と考えてよい。したがって、 X は二項分布

$$B(600, p) \quad (\dots\dots \textcircled{0})$$

……ウ

に従い、 X の平均は、

$$E(X) = 600p \quad (\dots\dots \textcircled{3})$$

……エ

であり、分散は、

$$V(X) = 600p(1-p) \quad (\dots\dots \textcircled{5})$$

……オ

である。

ここで、標本の大きさ600は十分大きいから、 X は近似的に正規分布 $N(600p, 600p(1-p))$ に従う。

このとき、

$$R = \frac{X}{600} \quad (\text{標本比率})$$

とすると、 R の平均は、

$$E(R) = \frac{1}{600} E(X) = p \quad (\dots\dots \textcircled{0})$$

……カ

であり、分散は、

$$V(R) = \left(\frac{1}{600} \right)^2 V(X) = \frac{p(1-p)}{600} \quad (\dots\dots \textcircled{6})$$

……キ

であり、 R は近似的に正規分布 $N\left(p, \frac{p(1-p)}{600}\right)$ に従う。

したがって、

$$Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{V(R)}} = \frac{R - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{600}}} \quad (\dots\dots \textcircled{7})$$

……ク

は、近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$P(|Z| \leq z_0) = 0.95$$

とすると、

$$2P(0 \leq Z \leq z_0) = 0.95$$

$$P(0 \leq Z \leq z_0) = 0.475$$

であるから、正規分布表より、

$$z_0 = \underline{\underline{1.96}} \quad \dots\dots \text{ケ, コサ}$$

である。

$|Z| \leq z_0$, すなわち $|Z| \leq 1.96$ は、

$$|R - p| \leq 1.96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{600}} \quad \dots\dots \text{①}$$

と変形できる。ここで、標本の大きさ 600 は十分大きいので、大数の法則より、 R は p に近いとみなしてよいから、①の右辺の p を R で置き換えると、

$$|R - p| \leq 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{600}}$$

となる。この不等式を p について解くことによって、 p に対する信頼度 95% の信頼区間

$$R - 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{600}} \leq p \leq R + 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{600}} \quad \dots\dots \text{②}$$

が得られる。質問 1 の結果から、

$$R = \frac{360}{600} = \underline{\underline{0.60}} \quad \dots\dots \text{シス}$$

であり、

$$\begin{aligned} 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{600}} &= 1.96 \times \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{600}} \\ &= 1.96 \times \frac{2}{10^2} \\ &= 0.0392 \end{aligned}$$

であるから、②より、 p に対する信頼度 95% の信頼区間は、

$$0.60 - 0.0392 \leq p \leq 0.60 + 0.0392$$

$$0.5608 \leq p \leq 0.6392$$

小数第 3 位を四捨五入すると、

$$\underline{\underline{0.56}} \leq p \leq \underline{\underline{0.64}} \quad \dots\dots \text{セ〜チ}$$

である。

(2) ボックス、ゴミを次のように定める。

ボックス：自動販売機の横にあるボックス

ゴミ：飲料容器以外のゴミ

質問 1 の回答を用いて、 x, y を次のように定める。

㊦ ボックスがゴミ箱でないことを知っている 360 人のうち、 x 人がゴミをボックスに捨てることがある

㊦ ボックスがゴミ箱でないことを知らない 240 人のうち、 y 人がゴミをボックスに捨てることがある

㊦, ㊦において、

$$0 \leq x \leq 360, 0 \leq y \leq 240 \quad \dots\dots \text{③}$$

であり、質問 2 の回答より、

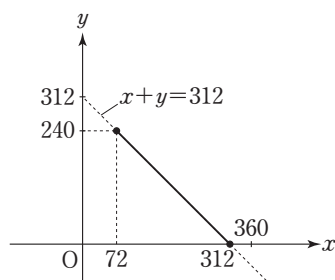
$$x + y = 312 \quad \dots\dots \text{④}$$

である。

また、㊦より、

$$r = \frac{x}{360} \times 100 \quad \dots\dots \text{⑤}$$

である。



③, ④と上図より、

$$72 \leq x \leq 312$$

であるから、⑤より、

$$\frac{72}{360} \times 100 \leq r \leq \frac{312}{360} \times 100$$

$$20 \leq r \leq \frac{260}{3}$$

であり、 r の値として考えられる最小のものは、

$$r = \underline{\underline{20}} \quad \dots\dots \text{ツテ}$$

である。

従来型のリサイクルボックスの場合、ボックス 1 つあたりの飲料容器以外のゴミの重さを Y kg とすると、 Y は正規分布 $N(0.9, (0.2)^2)$ に従うから、

$$W = \frac{Y - 0.9}{0.2}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

これより、従来型のリサイクルボックスの場合、1 つのボックスに入れられる飲料容器以外のゴミの重さが 0.6 kg 以下となる確率は、

$$\begin{aligned} P(Y \leq 0.6) &= P\left(W \leq \frac{0.6 - 0.9}{0.2} = -1.5\right) \\ &= P(W \geq 1.5) \\ &= P(W \geq 0) - P(0 \leq W \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 \quad (\text{正規分布表より}) \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

であり、小数第 4 位を四捨五入すると、

$$\underline{\underline{0.067}} \quad \dots\dots \text{トナニ}$$

である。

「ニューリサイクルボックス」を n か所に設置するとする。すると、標本の大きさは n であり、標準偏差は 0.2 であるから、標本平均を $\bar{U}$ とすると、 m に対する信頼度 95% の信頼区間は、

$$\bar{U} - 1.96 \times \frac{0.2}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{U} + 1.96 \times \frac{0.2}{\sqrt{n}}$$

であり、その幅は、

$$2 \times 1.96 \times \frac{0.2}{\sqrt{n}} = \frac{0.784}{\sqrt{n}}$$

である。

よって、

$$\frac{0.784}{\sqrt{n}} \leq 0.1$$

より、

$$\sqrt{n} \geq 7.84$$

$$n \geq (7.84)^2 = 61.4656$$

n は自然数であるから、

$$n \geq 62$$

となるから、少なくとも、

$$\underline{62} \text{ か所}$$

……ヌネ

を調査すればよい。

アドバイス

信頼区間の幅

母平均 m に対する信頼区間を $A \leq m \leq B$ としたとき、 $B - A$ を信頼区間の幅という。母標準偏差を σ 、標本の大きさを n とすると、信頼区間の幅は、

$$\text{信頼度 90\% で推定したとき} \quad 2 \cdot 1.64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{信頼度 95\% で推定したとき} \quad 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{信頼度 99\% で推定したとき} \quad 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

このことからわかるように、 n を大きくすると信頼区間の幅は小さくなり、信頼度を上げると信頼区間の幅は大きくなる。

母比率を推定するときも同様のことがいえる。

標本の大きさと信頼区間の幅の関係を理解しておこう。

第4問 数列

▶ 出題のねらい

- 漸化式で定義された数列において、前の項から次の項を求める計算ができるか。
- 数学的帰納法による不等式の証明のしくみを理解できているか。

▶ 解説

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3}{a_n + 2} \quad \cdots (*)$$

(*) より、

$$a_2 = \frac{3}{a_1 + 2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{a_2 + 2} = \frac{3}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7} \quad \cdots \text{ア}$$

$$a_4 = \frac{3}{a_3 + 2} = \frac{3}{\frac{6}{7} + 2} = \frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20} \quad \cdots \text{イウ}$$

$$a_5 = \frac{3}{a_4 + 2} = \frac{3}{\frac{21}{20} + 2} = \frac{60}{61} = 1 - \frac{1}{61} \quad \cdots \text{エオ}$$

である。

$$b_n = a_{2n} \text{ より、}$$

$$b_{n+1} = a_{2(n+1)} = a_{2n+2} \quad \cdots \text{カ}$$

である。

(1) (*) より、

$$\begin{aligned} a_{m+2} &= \frac{3}{a_{m+1} + 2} \\ &= \frac{3}{\frac{3}{a_m + 2} + 2} \\ &= \frac{3(a_m + 2)}{3 + 2(a_m + 2)} \\ &= \frac{3a_m + 6}{2a_m + 7} \quad \cdots \text{キ} \sim \text{コ} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} a_{m+2} - 1 &= \frac{3a_m + 6}{2a_m + 7} - 1 \\ &= \frac{3a_m + 6 - (2a_m + 7)}{2a_m + 7} \\ &= \frac{a_m - 1}{2a_m + 7} \quad \cdots \text{①} \quad \cdots \text{サ} \end{aligned}$$

および、

$$a_m - a_{m+2} = a_m - \frac{3a_m + 6}{2a_m + 7}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_m(2a_m+7)-(3a_m+6)}{2a_m+7} \\
&= \frac{2a_m^2+4a_m-6}{2a_m+7} \\
&= \frac{2(a_m-1)(a_m+3)}{2a_m+7} \quad \dots\dots ②
\end{aligned}$$

……シ、ス

が成り立つ。

(2)

(I) $n=1$ のとき、

$$b_1=a_2=\frac{3}{2}>1$$

より、

$$\underline{\underline{b_n > 1}} \quad (\dots\dots ③)$$

……セ

は成り立つ。

(II) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots\dots$) のとき、 $b_n > 1$ が成り立つ、すなわち、

$$b_k > 1$$

と仮定する。

①において、

$$m=2k \quad (\dots\dots ④)$$

……ソ

とすると、

$$a_{2k+2}-1=\frac{a_{2k}-1}{2a_{2k}+7}$$

$$b_{k+1}-1=\frac{b_k-1}{2b_k+7}$$

である。ここで、 $b_k > 1$ であるから、

$$b_{k+1}-1 > 0$$

$$b_{k+1} > 1$$

より、 $b_n > 1$ は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I), (II) より、すべての自然数 n について $b_n > 1$ が成り立つ。……③

次に、②において、

$$m=2n \quad (\dots\dots ⑤)$$

……タ

とすると、

$$a_{2n}-a_{2n+2}=\frac{2(a_{2n}-1)(a_{2n}+3)}{2a_{2n}+7}$$

$$b_n-b_{n+1}=\frac{2(b_n-1)(b_n+3)}{2b_n+7}$$

である。ここで、 $b_n > 1$ であるから、

$$b_n-b_{n+1} > 0$$

$$\underline{\underline{b_n > b_{n+1}}} \quad (\dots\dots ⑥)$$

……チ

が成り立つ。……④

③、④より、

$$1 < b_{n+1} < b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots)$$

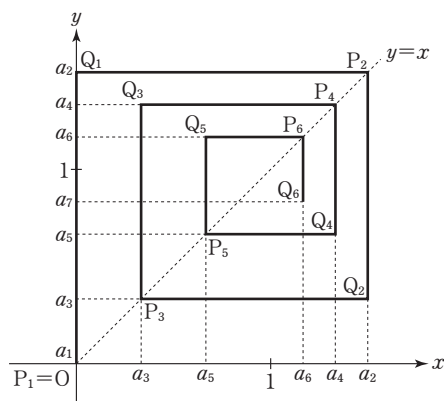
が成り立つことが示された。

これより、 $1 < a_{2n+2} < a_{2n}$ である。 $a_n \geq 0$ に注意して同様にすると、 $a_{2n-1} < a_{2n+1} < 1$ が成り立つことも示すことができる。

(3) (2)より、

$$0=a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < 1 < a_6 < a_4 < a_2=\frac{3}{2}$$

であり、点 $P_1 \sim P_6$ 、点 $Q_1 \sim Q_6$ までは考え、次図のようになる。



よって、 L_6 の概形は、

④の太い実線

……ツ

である。

(注) $a_{2n-1} < a_{2n+1} < 1$ について、

$c_n = a_{2n-1}$ とおくと、 $c_n < c_{n+1} < 1$ を示せばよい。

(*) と $a_1=0$ より、帰納的に

$a_n \geq 0$ ($n=1, 2, 3, \dots\dots$) が成り立つ。

(I) $c_1=a_1=0$ より、 $n=1$ のとき、

$c_n < 1$ が成り立つ。

(II) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots\dots$) のとき、

$c_n < 1$ が成り立つ、すなわち $c_k < 1$ と仮定すると、 $0 \leq c_k < 1$ である。

①で $m=2k-1$ とすると、

$$c_{k+1}-1=\frac{c_k-1}{2c_k+7} < 0 \quad (0 \leq c_n < 1 \text{ より})$$

$$c_{k+1} < 1$$

となるから、 $n=k+1$ のときも $c_n < 1$ が成り立つ。

(I), (II) より、 $c_n < 1$ ($n=1, 2, 3, \dots\dots$) が成り立つ。

次に、②で $m=2n-1$ とすると、

$$c_n-c_{n+1}=\frac{2(c_n-1)(c_n+3)}{2c_n+7} < 0$$

($0 \leq c_n < 1$ より)

$$c_n < c_{n+1}$$

である。

以上より、すべての自然数 n について
 $(0 \leq) c_n < c_{n+1} < 1$ が成り立つ。

アドバイス

数学的帰納法

数学的帰納法を用いて証明できるのは、自然数 n についての命題である。数列 $\{a_n\}$ は、自然数 n に対し項 a_n が定められるものなので、数学的帰納法を用いた証明のテーマになることが多い。

数学的帰納法を用いた証明の第2段階(本問(2)の(II))は、

「 $n=k$ のとき命題が成り立つと仮定して、
 $n=k+1$ のときも命題が成り立つことを示す」

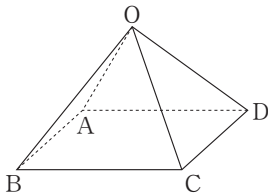
で、ここが山場である。仮定される式と導かれる式を明確にすることが、正しく証明を進めるポイントである。(2)を穴埋めでなく、自分の手で証明を書いてみて、数学的帰納法の理解を固めよう。

第5問 ベクトル

▶ 出題のねらい

- 平面と直線の交点の位置ベクトルを求められるか。
- 空間図形の角の大きさ、線分の長さをベクトルを用いて考察できるか。

▶ 解説



- (1) $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ はすべて1辺の長さが1の正三角形であるから、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \dots\dots \text{ア, イ} \end{aligned}$$

である。

$$\vec{d} = \vec{OD}$$

$$= \vec{OA} + \vec{AD}$$

$$= \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$= \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB}$$

$$= \underline{\underline{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}} \quad (\dots\dots \text{②}) \quad \dots\dots \text{ウ}$$

であるから、

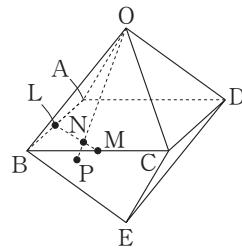
$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{d} &= \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{2} - 1^2 + \frac{1}{2} \\ &= \underline{\underline{0}} \quad \dots\dots \text{エ} \end{aligned}$$

であり、同様に(対称性より)、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

である。

(2)



$$\begin{aligned} \vec{OE} &= \vec{b} + \vec{d} \\ &= \vec{b} + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \underline{\underline{\vec{a} + \vec{c}}} \end{aligned}$$

$$\vec{OL} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{OM} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

であり、

$$\begin{aligned} \vec{ON} &= \frac{\vec{OL} + 2\vec{OM}}{3} \\ &= \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + 2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{6}}} \quad \dots\dots \text{オ} \sim \text{キ} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= k\vec{ON} \\ &= k \frac{\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{6} \\ &= \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c} \quad \dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \vec{CP} &= s\vec{CB} + t\vec{CE} \\ \vec{OP} - \vec{OC} &= s(\vec{OB} - \vec{OC}) + t(\vec{OE} - \vec{OC}) \\ \vec{OP} &= s\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} + t(\vec{a} + \vec{c}) \end{aligned}$$

$$=t\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c} \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

である。

①, ②と4点O, A, B, Cが同一平面上にないことから,

$$\frac{k}{6}=t, \quad \frac{k}{2}=s, \quad \frac{k}{3}=1-s$$

であり, これを解くと,

$$k=\frac{6}{5}, \quad s=\frac{3}{5}, \quad t=\frac{1}{5} \quad \cdots\cdots\text{ク, ケ}$$

となる。したがって, ①または②に代入すると,

$$\vec{OP}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}}{5} \quad \cdots\cdots\text{コ}$$

である。また,

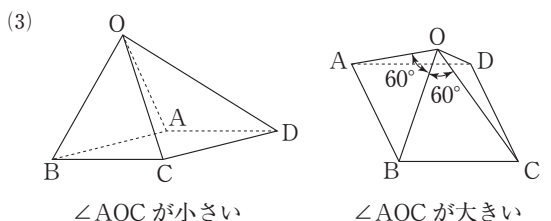
$$\vec{CP}=s\vec{CB}+t\vec{CE}$$

$$s=\frac{3}{5}>0, \quad t=\frac{1}{5}>0, \quad s+t=\frac{4}{5}<1$$

であるから, 点Pは△BCEの

内部 (……①) ……サ

にある。



∠AOB=∠BOC=60°より, ∠AOCは,

$$0^\circ<\angle AOC<60^\circ+60^\circ=\underline{120^\circ} \quad \cdots\cdots\text{シセ}$$

の範囲で変化する。

(ア)より,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

であり,

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{OA} + \vec{AD} \\ &= \vec{OA} + \vec{BC} \quad ((イ)より) \\ &= \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} \\ &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

である。

∠AOC=60°のとき,

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\textcircled{1} \quad \cdots\cdots\text{ソ}$$

であり,

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=\frac{1}{2}-1^2+\frac{1}{2}$$

$$=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{2} \quad \cdots\cdots\text{タ}$$

であり,

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &\quad -2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c} \end{aligned}$$

$$=1^2+1^2+1^2-2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2$$

$$|\vec{d}|=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots\text{チ}$$

である。

次に,

$$0^\circ<\angle AOC<120^\circ$$

の範囲で∠AOCが大きくなるとき,

$$\begin{aligned} \vec{b}\cdot\vec{d} &= \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}-1^2+\frac{1}{2} \\ &=0 \end{aligned}$$

より, ∠BOD=90°となるから, ∠BODは,

一定である。 (……②) ……ツ

このことから, △OBDの面積は,

$$\triangle OBD=\frac{1}{2}OB\cdot OD=\frac{1}{2}OD$$

ここで,

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &\quad -2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c} \\ &= 1^2+1^2+1^2-2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2} \\ &\quad +2\cdot1\cdot1\cdot\cos\angle AOC \\ &= 1+2\cos\angle AOC \end{aligned}$$

より,

$$OD=|\vec{d}|=\sqrt{1+2\cos\angle AOC}$$

である。したがって,

$$\triangle OBD=\frac{1}{2}\sqrt{1+2\cos\angle AOC}$$

となる。

0°<∠AOC<120°の範囲で, ∠AOCが大きくなるとき, cos∠AOCの値は小さくなるので, △OBDの面積は,

小さくなる。 (……①) ……テ

平面と直線の交点

本問(2)では，平面 BCE と直線 ON の交点の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を求めている。次の 2 つがともに成り立つような $k, (s, t)$ を求めることで $\overrightarrow{OP}$ が得られる。

1. 点 P は直線 ON 上にある

$$\iff \overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{ON} \quad (k \text{ は実数})$$

2. 点 P は平面 BCE 上にある

$$\iff \overrightarrow{CP} = s \overrightarrow{CB} + t \overrightarrow{CE} \quad (s, t \text{ は実数})$$

典型問題であるから，確実に理解して解けるようにしておこう。