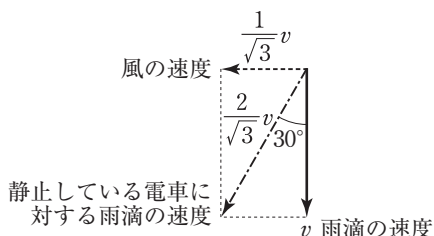


▶ 出題のねらい

問1は2次元平面上の相対速度，問2は回折格子，問3は気柱の共鳴とうなり，問4は交流回路における共振，問5は放射線についての問題である。各分野の用語や基本的な概念が理解できているかを問うた。

▶ 解説

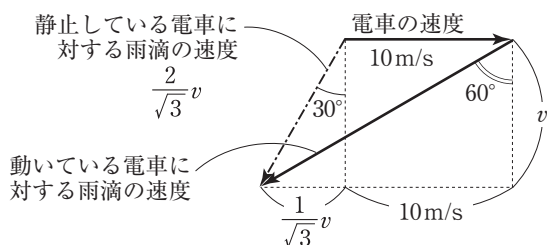
問1 風が吹いていないとき，鉛直下向きに落下する雨滴の速さを v [m/s] とする。風が吹いたときの雨滴の速度は，静止している電車に対する雨滴の速度であり，その速度が鉛直方向と 30° の角度をなしていたことから，次図のように，静止している電車に対する雨滴の速さは $\frac{2}{\sqrt{3}}v$ であり，風の速さは $\frac{1}{\sqrt{3}}v$ である。



風が水平左向きに一定の速さ $\frac{1}{\sqrt{3}}v$ で連続して吹いており，電車が水平右向きに速さ 10 m/s で動いているとき，次図のように，動いている電車に対する雨滴の速度が鉛直方向と 60° の角度をなしていたことから，

$$v \tan 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}v + 10 \text{ m/s}$$

が成り立つ。



よって，

$$\sqrt{3}v - \frac{1}{\sqrt{3}}v = 10 \text{ m/s}$$

ゆえに，

$$v = 5\sqrt{3} \text{ m/s} = 5 \times 1.73 \text{ m/s} = 8.65 \text{ m/s} \approx 8.7 \text{ m/s}$$

となる。なお，これを用いると，風の速さは，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}v = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 5\sqrt{3} \text{ m/s} = 5.0 \text{ m/s}$$

であることがわかる。

【別解】

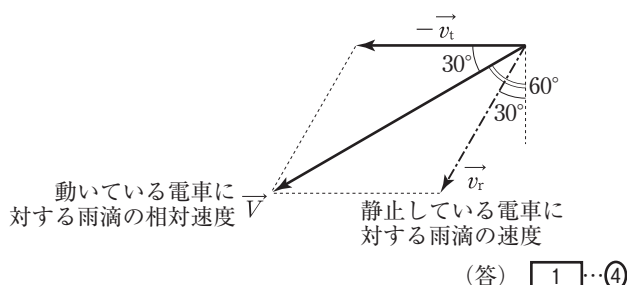
2次元平面における相対速度に関して、以下のように考えることもできる。動いている電車に対する雨滴の相対速度を $\vec{V}$ [m/s]、静止している電車に対する雨滴の速度を $\vec{v}_r$ [m/s]、電車の速度を $\vec{v}_t$ [m/s] とすると、

$$\vec{V} = \vec{v}_r - \vec{v}_t = \vec{v}_r + (-\vec{v}_t)$$

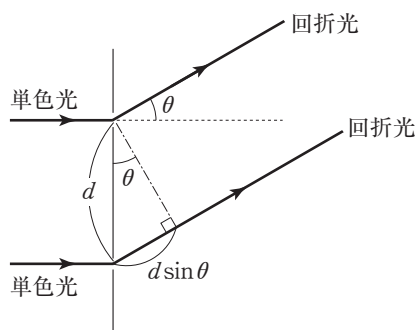
であるから、次図のように、 $\vec{V}$ は $\vec{v}_r$ と $-\vec{v}_t$ の和である。 $\vec{V}$ は鉛直下向きから時計回りに 60° 回転した向きであるから、 $\vec{V}$ は $-\vec{v}_t$ と 30° の角をなす。さらに、 $\vec{v}_r$ は鉛直下向きから時計回りに 30° 回転した向きであるから、 $\vec{V}$ は $-\vec{v}_t$ 、 $\vec{v}_r$ とそれぞれ 30° の角をなしており、 $|\vec{v}_r| = |\vec{V}|$ である。 $|\vec{v}_r| = \frac{2}{\sqrt{3}}v$ 、 $|\vec{v}_t| = 10$ m/s であるから、

$$\frac{2}{\sqrt{3}}v = 10 \text{ m/s} \quad \text{ゆえに、} v = 5\sqrt{3} \text{ m/s} \approx 8.7 \text{ m/s}$$

を得る。



問2 回折格子の格子定数を d [m] とすると、次図のように、回折格子の隣り合うスリットから同じ角度 θ の方向に回折する2つの光線の経路差は $d \sin \theta$ である。



本問では実験装置が真空中に置かれているため、光路差も $d \sin \theta$ である。単色光の波長を λ [m] とすると、回折角 θ の方向に明線ができる条件式は、 $m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ を用いて、

$$d \sin \theta = m\lambda \quad \text{よって、} \sin \theta = \frac{\lambda}{d}m$$

である。 $d=1.0 \times 10^{-6}$ m、 $\lambda=4.0 \times 10^{-7}$ m を代入すると、

$$\sin \theta = \frac{4.0 \times 10^{-7} \text{ m}}{1.0 \times 10^{-6} \text{ m}}m = 0.40m$$

となる。 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ を満たすのは、 $m=0, \pm 1, \pm 2$ である。 $m=0$ のとき $\theta=0^\circ$ であり、図4を用いると、 $m=\pm 1$ で $\sin \theta = \pm 0.40$ のと

相対速度

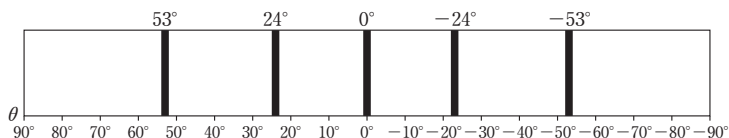
速度 $\vec{v}_A$ の物体 A の運動を、速度 $\vec{v}_B$ で運動する物体 B から見たときの相対速度 $\vec{v}_{BA}$ は、

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

光学距離と光路差

光が屈折率 n の媒質中を距離 L だけ進むとき、真空中を進む光は同じ時間で距離 nL だけ進むことができる。このように、媒質中の距離 L を真空中に換算した距離 nL を光学距離(光路長)という。光学距離の差を、光路差という。

き $\theta \approx \pm 24^\circ$, $m = \pm 2$ で $\sin \theta = \pm 0.80$ のとき $\theta \approx \pm 53^\circ$ である。よって、明線の様子を正しく表した図は次図のようになり、正解は④である。



(答) 2 … ④

整理 光の干渉条件

同じ光源から出た光が、異なる経路を通ってある 1 点に到達すると、光路差によって強め合ったり弱め合ったりすることがある。光の経路の途中で位相の変化がないとき、媒質中での光の波長を λ , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ とすると、強め合う条件と弱め合う条件は、

強め合う条件：光路差 $= m\lambda$

弱め合う条件：光路差 $= \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

となる。なお、一方の光の位相が π ずれると、強め合う条件と弱め合う条件が逆になる。

問 3 フルートなどの管楽器は、管口から吹き込んだ空気の振動によって管内の気柱を共鳴させて音を出す。このとき、管内の気柱には定常波が生じている。空気中を伝わる音波の速さを V [m/s] とすると、1 気圧, t [°C] の空気中では、

$$V = 331.5 + 0.6t \text{ [m/s]}$$

である。よって、室温が高いほど、音波が伝わる速さ V [m/s] は大きい。

一定の振動数 442 Hz を発するおんさとフルートによって毎秒 2 回のうなりが聞こえるとき、フルートが発する音波の振動数は 440 Hz または 444 Hz である。音速を V [m/s], フルートの中に生じる定常波の波長を λ [m], 振動数を f [Hz] とすると、波の基本式より、

$$V = f\lambda$$

である。 V が一定のとき、フルートの長さを調節して波長 λ を短くすると、振動数 f が大きくなる。 f が大きくなってうなりが聞こえなくなったとき、フルートが発する音波の振動数は 442 Hz であるから、長さを調節する前にフルートが発していた音波の振動数は 440 Hz である。

(答) 3 … ⑦

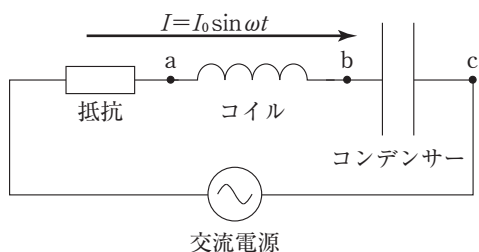
問 4 時刻 t [s] において、抵抗、コイルおよびコンデンサーに流れる交流電流 I [A] が、

$$I = I_0 \sin \omega t$$

と表されるとする。ここで、 I_0 は電流の最大値であり、電流 I の向きは次図の矢印の向きを正とする。

振動数 f_1, f_2 ($f_1 \neq f_2$) の音波による単位時間あたりのうなりの回数 N は、

$$N = |f_1 - f_2|$$



コイルの自己インダクタンスを L [H], コイルの端子 b に対する端子 a の電圧を V_L [V] とすると, V_L は電流 I に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいるので, コイルのリアクタンス ωL を用いて,

$$V_L = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega L I_0 \cos \omega t$$

と表せる。また, コンデンサーの電気容量を C [F], コンデンサーの端子 c に対する端子 b の電圧を V_C [V] とすると, V_C は電流 I に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れているので, コンデンサーのリアクタンス $\frac{1}{\omega C}$ を用いて,

$$V_C = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t$$

と表せる。

回路に大きな電流が流れるとき, 抵抗の電圧が大きくなる。 $V_L + V_C = 0$ となるとき, 抵抗の電圧が最大となり, 回路が共振する。このとき, キルヒホッフの第2法則より, 抵抗の電圧は交流電源の電圧に等しい。図6より, $\omega = 5.0 \times 10^2$ rad/s で回路が共振するときの電流の実効値は $I_e = 0.50$ A であるから, 抵抗の抵抗値を R [Ω] とすると, オームの法則より,

$$R = \frac{1.0 \times 10^2 \text{ V}}{0.50 \text{ A}} = 2.0 \times 10^2 \Omega$$

である。また, $V_L + V_C = 0$ より,

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \cos \omega t = 0$$

であり, 時刻 t によらずこの式が成り立つとき, 角周波数は,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ [rad/s]} \quad \cdots \cdots (i)$$

である。本問において, はじめのコンデンサーの電気容量は $C = 10 \mu\text{F} = 10 \times 10^{-6} \text{ F}$ であり, コイルの自己インダクタンスは $L = 0.40 \text{ H}$ である。これらを(i)式に代入すると,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{0.40 \text{ H} \times (10 \times 10^{-6} \text{ F})}} = \frac{1}{2.0 \times 10^{-3}} \text{ rad/s} \\ &= 5.0 \times 10^2 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

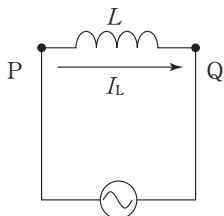
となり, 共振する角周波数を得る。

コンデンサーの電気容量 C を大きくすると, (i)式より, 共振する角周波数は小さくなる。同様に, コイルの自己インダクタンス L を大きくする場合にも, 共振する角周波数は小さくなる。また, 共振するときの電流の実効値は, 交流電源の電圧の実効値と抵抗の抵抗値によって決定されるので, コンデンサーの電気容量およびコイルの自己インダクタンスには依存しない。

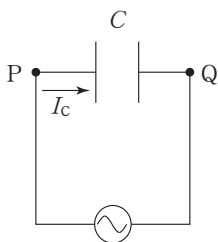
(答) 4 … 2, 5 … 0, 6 … 2, 7 … 8

整理 交流回路におけるコイルとコンデンサー

角周波数 ω の交流電源に自己インダクタンス L のコイルを接続し、次図の点 Q に対する点 P の電位を V_L 、点 P から点 Q に流れる電流を I_L とすると、 V_L は I_L に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進む。また、コイルのリアクタンスは ωL である。



交流電源に電気容量 C のコンデンサーを接続し、次図の点 Q に対する点 P の電位を V_C 、点 P から点 Q に流れる電流を I_C とすると、 V_C は I_C に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れる。また、コンデンサーのリアクタンスは $\frac{1}{\omega C}$ である。



問 5 放射線には α 線、 β 線、 γ 線の 3 種類がある。 α 線の放出は、原子核から陽子 2 個と中性子 2 個がヘリウムの原子核 ${}^4_2\text{He}$ となって出ていく現象である。よって、原子番号が 2 だけ小さく、質量数が 4 だけ小さい別の原子核に変化する。したがって、選択肢①は誤りである。

放射線の測定単位には、Bq (ベクレル) の他に、放射線が物質に吸収されときのエネルギーを表す吸収線量の単位 Gy (グレイ) がある。1 Gy は、物質 1 kg あたりに吸収されるエネルギーが 1 J であるときの吸収線量である。また、吸収線量に放射線の種類やエネルギーなどを考慮した係数をかけた量を等価線量といい、単位には Sv (シーベルト) を用いる。

(答) 8…①

整理 原子核の崩壊

放射性元素の原子核が放射線を出しながら崩壊する現象(放射性崩壊)として、 α 崩壊と β 崩壊がある。

α 崩壊では α 線が放出される。 α 線の正体はヘリウム ${}^4_2\text{He}$ 原子核である。 α 崩壊が起こると質量数が 4 減少し、陽子の数(原子番号)が 2 減少する。

また、 β 崩壊では β 線が放出される。 β 線の正体は高速の電子である。 β 崩壊が起こると質量数は変化しないが、陽子の数(原子番号)が1増加する。

α 崩壊や β 崩壊の後、高エネルギーで不安定な原子核が γ 線を放出して安定な原子核になるときがある。 γ 線の正体は高エネルギーの電磁波である。 γ 線を放出しても質量数や陽子の数(原子番号)は変化しない。

整理 放射性崩壊による放射線

原子核が放射線を出して、より安定な原子核になる現象を放射性崩壊という。放射性崩壊のときに原子核から出る放射線には、次の3種類がある。

名称	正体	帯電	透過力	電離作用
α 線	ヘリウム ${}^4_2\text{He}$ 原子核	正	小	大
β 線	高速の電子の流れ	負	中	中
γ 線	波長の短い電磁波	中性	大	小

第2問 電気回路

▶ 出題のねらい

乾電池の起電力と内部抵抗を測定する実験について、電気回路および実験結果を考える問題である。実験データの読み取りと数値計算ができるかを問うた。後半は、電圧計と電流計の内部抵抗による誤差の影響、分流器に関する問題である。基本的な問題であるが、教科書の内容の定着度が浮き彫りになる。共通テスト直前まで、教科書をじっくりと読み、理解を深めてほしい。

▶ 解説

問1 乾電池の起電力の大きさを E [V]、内部抵抗の抵抗値を r [Ω]とすると、乾電池を流れる電流の大きさ I [A]を用いて、乾電池の端子電圧 V [V]は、

$$V = E - rI \text{ [V]} \quad \cdots \cdots (i)$$

と表せる。よって、電流の大きさ I が大きいほど、端子電圧 V は小さくなる。実験で得た図2のグラフはこの関係を満たしている。実験では電流の大きさを $I = 0$ Aにすることはできないが、図2のグラフを延長して V 切片を求めると、 $V = 2.5$ Vである。したがって、(i)式より、

$$E = 2.5 \text{ V}$$

を得る。

(答) 9 ……⑥

問2 可変抵抗の抵抗値を $R[\Omega]$ 、乾電池を流れる電流の大きさを $I[\text{A}]$ とすると、キルヒホッフの第2法則より、

$$E = rI + RI \quad \text{よって、} I = \frac{E}{R + r} \quad \cdots \cdots \text{(ii)}$$

である。したがって、 R を小さくすると I は大きくなる。

図2のグラフについて、 $I = 0.20 \text{ A}$ のとき $V = 2.4 \text{ V}$ であるから、(i)式より、

$$2.4 \text{ V} = 2.5 \text{ V} - r \times 0.20 \text{ A} \quad \text{よって、} r = 0.50 \Omega$$

である。また、(ii)式より、

$$R = \frac{E}{I} - r$$

であるから、 $I = 1.0 \text{ A}$ のとき、

$$R = \frac{2.5 \text{ V}}{1.0 \text{ A}} - 0.50 \Omega = 2.0 \Omega$$

である。

【別解】

図1の回路において、電池と可変抵抗に流れる電流の大きさは等しく、電池の端子電圧と可変抵抗の電圧は等しい。図2のグラフより、電池の電流の大きさが $I = 1.0 \text{ A}$ のとき、電池の端子電圧は $V = 2.0 \text{ V}$ であるから、これらを用いて、可変抵抗についてのオームの法則より、

$$R = \frac{2.0 \text{ V}}{1.0 \text{ A}} = 2.0 \Omega$$

を得る。

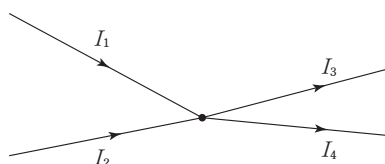
(答) 10 …②

整理 キルヒホッフの法則

キルヒホッフの第1法則

回路のある点に流れ込む電流の和と、流れ出る電流の和は等しい。

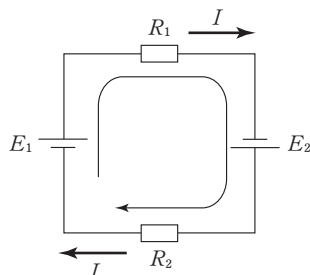
下の例では、 $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$



キルヒホッフの第2法則

閉回路を一回りするとき、起電力の和と、電位降下の和は等しい。

下の例では、 $E_1 + E_2 = R_1 I + R_2 I$



(i)式に、 $(I, V) = (0.40 \text{ A}, 2.3 \text{ V})$, $(0.60 \text{ A}, 2.2 \text{ V})$ などを代入して計算した場合にも、 $r = 0.50 \Omega$ を求めることができる。また、 r は図2のグラフの傾きの絶対値であるから、

$$r = \left| \frac{2.0 \text{ V} - 2.4 \text{ V}}{1.0 \text{ A} - 0.20 \text{ A}} \right|$$

として求めることもできる。

問3 可変抵抗の抵抗値が $R [\Omega]$ のとき、消費電力 $P [\text{W}]$ は、

$$P = RI^2$$

である。(ii)式を代入して、

$$P = R \cdot \frac{E^2}{(R+r)^2} = \frac{E^2 R}{(R+r)^2} \quad \cdots \cdots \text{(iii)}$$

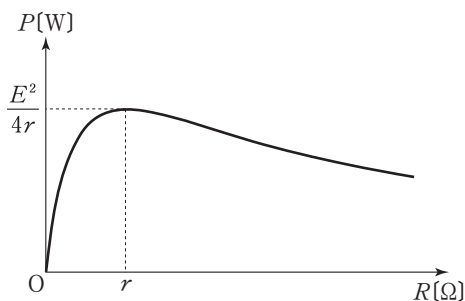
となる。 $R=0 \Omega$ のとき $P=0 \text{ W}$ であり、

$$P = \frac{E^2}{\left(\sqrt{R} + \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2} = \frac{E^2}{\left(\sqrt{R} - \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2 + 4r}$$

と変形すると、 $\sqrt{R} = \frac{r}{\sqrt{R}}$ のとき、すなわち $R=r$ のとき P は最大で

$$P = \frac{E^2}{4r} \text{ となる。したがって、} P \text{ と } R \text{ の関係を表したグラフは次図の}$$

ようになり、正解は選択肢③である。



(答) 11 ⋯ ③

問4 電圧を測定しようとする回路素子に対して電圧計は並列に、電流を測定しようとする回路素子に対して電流計は直列に接続するため、接続の方法が適切な回路は選択肢①と②である。

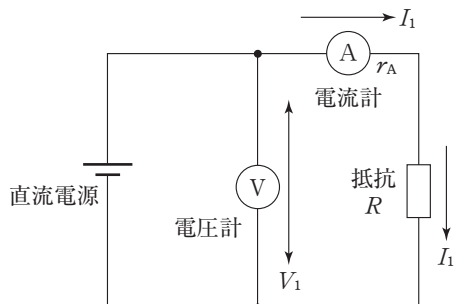
選択肢①の回路について、次図のように、電圧計、電流計が示す指針の値をそれぞれ $V_1 [\text{V}]$ 、 $I_1 [\text{A}]$ とすると、キルヒホッフの第2法則より、電圧計の値は電流計の電圧と抵抗の電圧の和に等しく、

$$V_1 = r_A I_1 + R I_1$$

である。 V_1 と I_1 を用いたオームの法則による計算値を $R_1' [\Omega]$ とすると、

$$R_1' = \frac{V_1}{I_1} = r_A + R$$

となる。したがって、 r_A と R が同程度の値のとき、 R_1' は R の2倍程度の値として求められ、誤差が大きくなる。



(iii)式について、 R を変数として P の増減表を書くとグラフの概形を調べることができる。

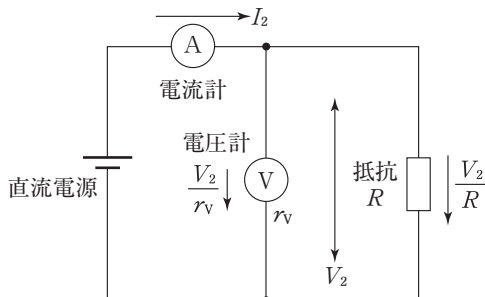
$$\frac{dP}{dR} = \frac{(-R+r)E^2}{(R+r)^3}$$

R	0	⋯	r	⋯	∞
$\frac{dP}{dR}$		+	0	-	0
P	0	↗	$\frac{E^2}{4r}$	↘	0

選択肢②の回路について、次図のように、電圧計、電流計が示す指針の値をそれぞれ V_2 [V], I_2 [A] とすると、キルヒホッフの第1法則より、電流計の値は電圧計に流れた電流と抵抗に流れた電流の和に等しく、

$$I_2 = \frac{V_2}{r_v} + \frac{V_2}{R} = \frac{R+r_v}{Rr_v} V_2$$

である。



V_2 と I_2 を用いたオームの法則による計算値を R_2' [Ω] とすると、

$$R_2' = \frac{V_2}{I_2} = \frac{Rr_v}{R+r_v} = \frac{R}{\frac{R}{r_v} + 1}$$

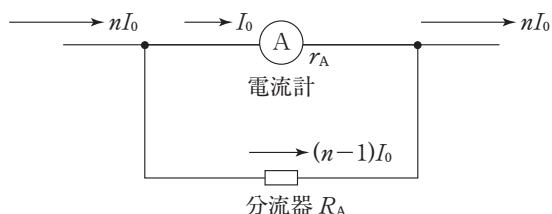
となる。したがって、 r_v が R に比べて十分に大きな値のとき、 $\frac{R}{r_v} \approx 0$ であるから、 $R_2' \approx R$ となり、抵抗値 R を精度良く求めることができる。したがって、正解は選択肢②である。

(答) 12 …②

問5 電流計に対して電気抵抗を並列に接続して分岐路を作ると、電流計の測定範囲を大きくすることができる。この電気抵抗を分流器という。電流計が測定できる電流の最大値が I_0 [A] であるとき、電流計の測定範囲を n 倍にするということは、電流が電流計と分流器に分岐する前の電流の大きさの最大値が nI_0 になるということである。そのうち、電流計には大きさ I_0 の電流が流れ、分流器には大きさ $(n-1)I_0$ の電流が流れる。電流計の内部抵抗を r_A [Ω], 分流器の抵抗値を R_A [Ω] とすると、キルヒホッフの第2法則より、

$$r_A \cdot I_0 = R_A \cdot (n-1)I_0 \quad \text{よって、} R_A = \frac{r_A}{n-1}$$

となる。



(答) 13 …⑧

A バネ付きピストンによる気体の状態変化

▶ 出題のねらい

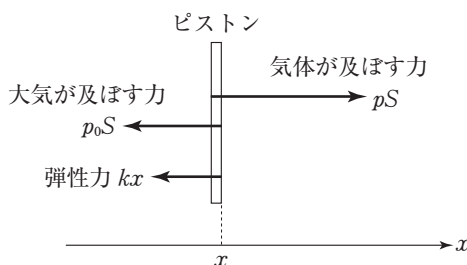
ばね付きピストンで封入された理想気体の状態変化を問うた。気体の体積が増加するとばねは縮んでいくため、ばねがピストンに及ぼす弾性力が大きくなり、気体の圧力が増加する。力のつり合いの式を用いて圧力と体積の関係を調べる必要がある。また、気体が膨張する際に外部にする仕事について、等温変化や断熱変化など、状態変化の種類によって仕事量が異なることを考察できるかを問うた。

▶ 解説

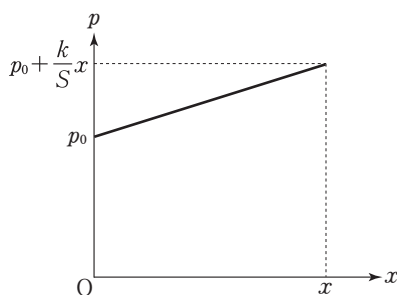
問1 バネのばね定数を k とすると、ピストンの位置が x ($x > 0$) のとき、ピストンに作用する弾性力は x 軸負の向きに大きさが kx である。ピストンには次図のように力が作用するので、 x 軸方向の力のつり合いより、

$$0 = pS - p_0S - kx \quad \text{よって、} p = p_0 + \frac{k}{S}x$$

である。



気体の圧力 p と位置 x の関係を表すグラフは、 p 切片が p_0 、傾きが $\frac{k}{S}$ の直線であり、次図のようになる。



(答) 14 …⑥

問2 ピストンが位置 $x=0$ から位置 x まで x 軸正の向きに変位するとき、気体がピストンにした仕事を W とすると、ピストンはゆっくり変位するため運動エネルギーは常に0であるから、ピストンについての運動エネルギーと仕事の関係より、

$$W + W_0 + W_k = 0 \quad \text{よって、} W = -W_0 - W_k \quad \cdots(i)$$

である。熱力学第1法則より、

$$Q = \Delta U + W \quad \text{よって、} \Delta U = Q - W = Q + W_0 + W_k$$

を得る。気体は膨張しているため、気体がピストンにした仕事 W は正である。また、大気がピストンにした仕事 W_0 は負、ばねがピストンにした仕事 W_k は負である。

【補足 1】

大気がピストンにした仕事 W_0 およびばねがピストンにした仕事 W_k は、直接計算することができる。

大気がピストンに及ぼす力は x 軸負の向きに大きさが $p_0 S$ で一定であるから、ピストンが x 変位する間に、大気がピストンにする仕事は、

$$W_0 = -p_0 S \cdot x$$

である。

ばねがピストンにした仕事が W_k のとき、ピストンがばねにした仕事は $-W_k$ である。ピストンの位置が $x=0$, x のとき、ばねの弾性力による位置エネルギーはそれぞれ 0 , $\frac{1}{2} kx^2$ であるから、ピストンがばねにした仕事 $-W_k$ は、力学的エネルギーと仕事の関係より、

$$-W_k = \frac{1}{2} kx^2 - 0 = \frac{1}{2} kx^2$$

である。よって、ばねがピストンにした仕事 W_k は、

$$W_k = -\frac{1}{2} kx^2$$

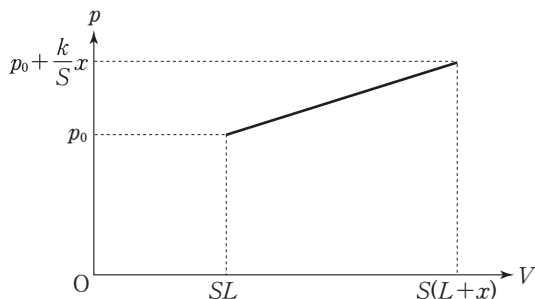
である。

【補足 2】

ピストンの位置が $x=0$ のとき、シリンダーの左側面とピストンの距離を L とすると、気体の体積は SL である。ピストンの位置が x のときの気体の体積を V とすると、

$$V = S(L+x)$$

であるから、問 1 で求めた気体の圧力 p と位置 x の関係を表すグラフをもとに、気体の圧力 p と体積 V の関係を表すグラフ、すなわち $p-V$ グラフを描くと次図のようになる。

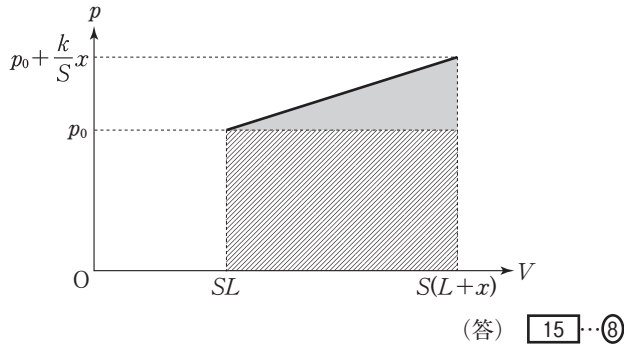


$p-V$ グラフが V 軸と囲む面積は、気体がピストンにした仕事 W の絶対値に等しい。 $W > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} W &= \left\{ p_0 + \left(p_0 + \frac{k}{S} x \right) \right\} \times Sx \times \frac{1}{2} \\ &= p_0 Sx + \frac{1}{2} kx^2 = -W_0 - W_k \end{aligned}$$

となり、(i)式に一致することがわかる。

また、気体がピストンにした仕事 W のうち、次図の斜線部分(長方形)は $-W_0$ を、灰色の部分(三角形)は $-W_k$ を表す。



整理 熱力学第1法則

気体が熱量 Q を吸収したとき、気体の内部エネルギーの変化量を ΔU 、気体が外部にした仕事を W とする。このとき、

$$Q = \Delta U + W$$

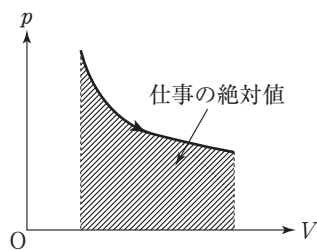
の関係が成り立つ。これを**熱力学第1法則**という。 $W < 0$ のとき、気体は外部から仕事をされており、外部が気体にした仕事を w とすると、 $W = -w$ であるから、熱力学第1法則を、

$$\Delta U = Q + w$$

と表すこともできる。

整理 気体がする仕事

気体は体積が増加するとき外部に正の仕事をし、体積が減少するとき外部に負の仕事をし、また、気体が外部にする仕事の絶対値は p - V グラフが V 軸と囲む面積に等しい。



問3 ばねが ℓ だけ縮むまでの間に、大気がピストンにした仕事、ばねがピストンにした仕事を前述の W_0 、 W_k と同様に求めると、それぞれ $-p_0 S\ell$ 、 $-\frac{1}{2}k\ell^2$ である。以下では、方法A、B、Cそれぞれについて、気体がピストンにした仕事、および外力がピストンにした仕事との関係を考える。

方法Aの断熱変化において気体がピストンにした仕事を W_a とすると、 $W_a > 0$ であり、 W_a は次図において断熱曲線が V 軸と囲む面積

に等しい。グラフにおいて、断熱変化後の気体の圧力を p_a とした。外力がピストンにした仕事を W_A とすると、気体、大気、弾性力、および外力がピストンにした仕事の和は 0 であるから、

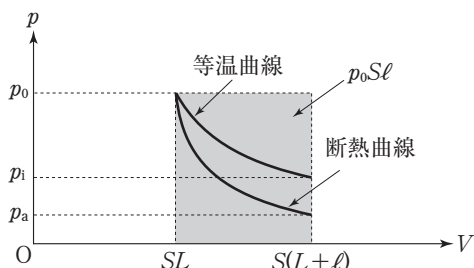
$$\overbrace{W_A}^{\text{気体}} + \overbrace{(-p_0 S \ell)}^{\text{大気}} + \overbrace{\left(-\frac{1}{2} k \ell^2\right)}^{\text{弾性力}} + W_A = 0$$

したがって、

$$W_A = p_0 S \ell - W_a + \frac{1}{2} k \ell^2 \quad \cdots \cdots (ii)$$

となる。

次に、方法 B の等温変化について考える。等温変化において気体がピストンにする仕事を W_i とすると、 $W_i > 0$ であり、 W_i は次図において等温曲線が V 軸と囲む面積に等しい。グラフにおいて、等温変化後の気体の圧力を p_i とした。



外力がピストンにした仕事を W_B とすると、気体、大気、弾性力、および外力がピストンにした仕事の和は 0 であるから、

$$\overbrace{W_i}^{\text{気体}} + \overbrace{(-p_0 S \ell)}^{\text{大気}} + \overbrace{\left(-\frac{1}{2} k \ell^2\right)}^{\text{弾性力}} + W_B = 0$$

よって、

$$W_B = p_0 S \ell - W_i + \frac{1}{2} k \ell^2 \quad \cdots \cdots (iii)$$

となる。

断熱変化で気体がした仕事 W_a と等温変化で気体がした仕事 W_i を p - V グラフを用いて比較すると、 $p_a < p_i$ であるから、 $W_a < W_i$ である。よって、(ii) 式および (iii) 式より、

$$W_A > W_B$$

であることが分かる。また、方法 A の断熱変化、方法 B の等温変化においてはいずれも気体の圧力が p_0 から減少するため、気体の圧力が p_0 で一定のまま定圧膨張した場合に気体がピストンにする仕事 $p_0 S \ell$ と W_a および W_i を比較すると、

$$p_0 S \ell > W_a, \quad p_0 S \ell > W_i$$

である。ゆえに、

$$W_A > \frac{1}{2} k \ell^2, \quad W_B > \frac{1}{2} k \ell^2$$

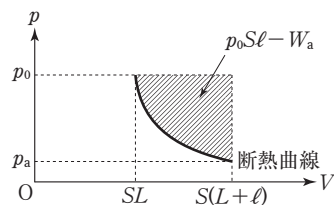
である。

方法 C ではシリンダー内には大気が存在するため、ピストンには外力とばねが仕事をする。外力がピストンにした仕事を W_C とすると、

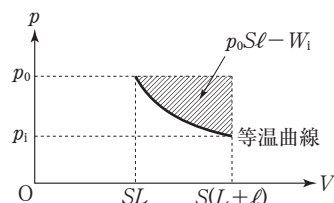
ばねがピストンにした仕事は $-\frac{1}{2} k \ell^2$ であるから、

$$W_C + \left(-\frac{1}{2} k \ell^2\right) = 0 \quad \text{よって、} \quad W_C = \frac{1}{2} k \ell^2$$

W_A は下図の斜線部分の面積と $\frac{1}{2} k \ell^2$ の和である。



W_B は下図の斜線部分の面積と $\frac{1}{2} k \ell^2$ の和である。



上の 2 つの面積の大小関係から $W_B < W_A$ である。

となる。

以上より、

$$W_C < W_B < W_A$$

を得る。

(答) 16 …⑥

B 気体の混合

▶ 出題のねらい

気体の混合および気体の断熱自由膨張について問うた。気体の混合において混合の前後で体積の総和が変化せず、気体が外部と熱のやり取りをしなければ、内部エネルギーの変化量は0であること、真空中への拡散である断熱自由膨張では気体の絶対温度が変化しないことは知識として覚えておき、それらの根拠は熱力学第1法則であることを理解しよう。

▶ 解説

問4 気体定数を R とする。コック I を開く前について、容器 A 内の理想気体(以下、単に気体と呼ぶ)の絶対温度(以下、単に温度と呼ぶ)を T_0 とすると、理想気体の状態方程式より、

$$p_0 V_0 = 2n \cdot R T_0 \quad \cdots \cdots (iv) \quad \text{よって、} T_0 = \frac{p_0 V_0}{2nR}$$

である。同様に、コック I を開く前について、容器 B 内の気体の温度を T_B とすると、

$$2p_0 V_0 = nR T_B \quad \text{よって、} T_B = \frac{2p_0 V_0}{nR} = 4T_0$$

である。

コック I を開いて容器 A 内の気体と容器 B 内の気体を混合するとき、気体は外部と熱のやり取りをせず、外部に仕事をしないため、熱力学第1法則より、気体の内部エネルギーの和は保存され、混合後は容器 A 内と B 内の気体は圧力・温度がともに等しい平衡状態に達している。

次に、気体の内部エネルギーの表し方について考える。定積モル比熱を C_V 、気体の物質量を n 、温度を T とすると、気体の内部エネルギー U は、

$$U = C_V \cdot nT \quad \cdots \cdots (v)$$

と表せる。気体の圧力を p 、体積を V とすると、理想気体の状態方程式より、

$$pV = nRT \quad \text{よって、} nT = \frac{pV}{R}$$

であるから、(v)式に代入して、

$$U = \frac{C_V}{R} pV$$

と表すことができる。これを用いて、混合の前後で内部エネルギーが保存されることを式で表すと、

$$\frac{C_V}{R} p_0 V_0 + \frac{C_V}{R} \cdot 2p_0 V_0 = \frac{C_V}{R} p_1 \cdot 2V_0 \quad \text{よって、} p_1 = \frac{3}{2} p_0$$

を得る。

理想気体の状態方程式

$$pV = nRT$$

p : 気体の圧力

V : 気体の体積

n : 気体の物質量

R : 気体定数

T : 気体の絶対温度

また、混合後の容器 A、B 内の気体の温度を T_1 として、内部エネルギーが保存されることを温度を用いて表すと、

$$C_V \cdot 2nT_0 + C_V \cdot n \cdot 4T_0 = C_V \cdot 3nT_1 \quad \text{よって、} T_1 = 2T_0$$

となる。したがって、容器 B 内の気体の温度は、コック I を開く前の $\frac{1}{2}$ 倍となっている。

混合後の容器 A 内と B 内の気体は同じ温度、同じ圧力であり、さらに体積が等しいため、理想気体の状態方程式より、物質量も等しいことがわかる。つまり、容器 A 内、B 内の気体はともに物質量が $\frac{3}{2}n$ である。

(答) 17 … 4, 18 … 3

整理 気体の内部エネルギー

気体分子の運動エネルギーと分子間力による位置エネルギーの総和を、**気体の内部エネルギー**という。理想気体の内部エネルギー U は気体の温度 T に比例し、理想気体の物質量を n とすると、

$$U = C_V \cdot nT$$

である。ここで、 C_V は定積モル比熱である。内部エネルギーの変化量は $\Delta U = C_V \cdot n \cdot \Delta T$ と書ける。単原子分子では $C_V = \frac{3}{2}R$ であるから、単原子分子理想気体の内部エネルギーの変化量は

$$\Delta U = \frac{3}{2}R \cdot n \cdot \Delta T \text{ となる。}$$

問 5 真空中への気体の拡散が断熱的に行われるとき、気体が外部にする仕事は 0 である。内部エネルギーの変化量を ΔU とすると、熱力学第 1 法則より、

$$\frac{Q}{0} = \Delta U + \frac{W}{0} \quad \text{よって、} \Delta U = 0$$

を得る。したがって、内部エネルギーは変化せず、気体の温度は変化しない。このように、真空中への断熱的な拡散(断熱自由膨張)では気体の温度は変化しない。拡散した後の気体の圧力を p_2 とすると、拡散前後の状態方程式は、

$$\text{拡散前 B 内: } p_1 V_0 = \frac{3}{2} nR \cdot 2T_0$$

$$\text{拡散後 BC 内: } p_2 \cdot 3V_0 = \frac{3}{2} nR \cdot 2T_0$$

となる。2 式より、

$$p_2 = \frac{1}{3} p_1$$

を得る。

(答) 19 … 7

混合後、容器 A 内と B 内の気体の全体について理想気体の状態方程式を考えることにより、 T_1 を求めることもできる。混合後の理想気体の状態方程式は、

$$\frac{3}{2} p_0 \cdot 2V_0 = 3nRT_1$$

(iv) 式を代入して、

$$3 \cdot 2nRT_0 = 3nRT_1$$

よって、 $T_1 = 2T_0$ を得る。

断熱自由膨張では気体の温度が変化しないが、準静的な変化(ゆっくりと状態が変化する可逆変化)ではないため等温変化と呼ぶことはできず、ボイルの法則は成り立たないことに注意したい。

▶ 出題のねらい

力学分野からは、鉛直面内の円運動を含む総合問題を出題した。半円筒面をもつ台が固定されている場合については、小球の円運動および放物運動についての基本的な理解を問うた。また、半円筒面をもつ台がなめらかな床の上を運動する場合には、小球と台の力学的エネルギー保存則、運動量保存則、ならびに運動方程式を考え、さらには台上から小球を観測したときの慣性力を用いて小球の運動を考察する必要がある。問題の誘導にしたがって、力学的な状況を的確に表現できるかを問うた。

▶ 解説

問1 重力による位置エネルギーの基準を台の上面とする。点Dでの速さを v_1 とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{5gr})^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg \cdot 2r \quad \text{よって、} v_1 = \sqrt{gr}$$

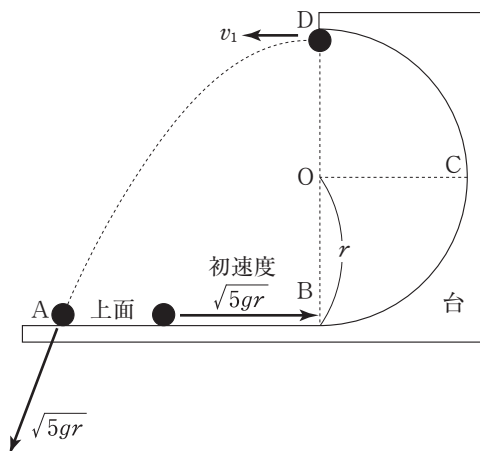
を得る。点Dから点Aまで移動するのに要する時間を t とすると、鉛直方向における小球の運動は自由落下であるから、

$$2r = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{よって、} t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

である。点Bから点Aまでの水平方向の距離を d とすると、水平方向における小球の運動は等速度運動であるから、

$$d = v_1 t = \sqrt{gr} \cdot 2\sqrt{\frac{r}{g}} = 2r$$

となる。なお、力学的エネルギー保存則より、点Aに落下する直前の速さは $\sqrt{5gr}$ である。



【補足】

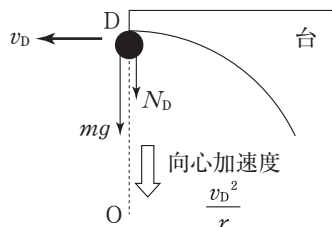
$v_0 \geq \sqrt{5gr}$ のとき小球が点Dに到達する理由を考察する。点Dにおける速さを v_D 、点Dにおいて半円筒面が小球に及ぼす垂直抗力の大きさを N_D とすると、点Dにおける円運動の運動方程式より、

$$m \frac{v_D^2}{r} = mg + N_D \quad \text{よって、} N_D = \frac{mv_D^2}{r} - mg$$

である。点 B を通過した直後から、半円筒面が小球に及ぼす垂直抗力の大きさは減少し、点 D において垂直抗力の大きさは最小となるので、 $N_D \geq 0$ であれば小球は点 D を通過する。したがって、

$$\frac{mv_D^2}{r} - mg \geq 0 \quad \text{よって、} v_D \geq \sqrt{gr}$$

となる。先の力学的エネルギー保存則より、点 D において $v_D \geq \sqrt{gr}$ のとき、小球の初速度の大きさ v_0 は $v_0 \geq \sqrt{5gr}$ である。すなわち、点 A における初速度の大きさが $\sqrt{5gr}$ のとき、点 D における垂直抗力の大きさは 0 であり、 $\sqrt{5gr}$ は点 D に到達するための最小の初速度の大きさであることがわかる。



(答) 20 … 2, 21 … 3

整理 力学的エネルギーと力学的エネルギー保存則

質量 m の物体が速さ v で運動しているとき、物体の運動エネルギーを K とすると、

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

である。

質量 m の物体が基準面から高さ h の位置にあるとき、物体の重力による位置エネルギーを U_g とすると、重力加速度の大きさ g を用いて、

$$U_g = mgh$$

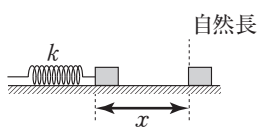
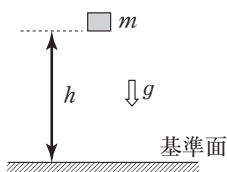
である。

自然長からの伸び(または縮み)が x のばねに取り付けられた物体について、ばね定数を k 、ばねの弾性力による位置エネルギーを U_k とすると、

$$U_k = \frac{1}{2}kx^2$$

である。

運動エネルギーと位置エネルギーの和を、力学的エネルギーという。物体に保存力のみが仕事をすると、物体の力学的エネルギーは変化しない。これを力学的エネルギー保存則という。



整理 等加速度直線運動

物体が一定の加速度で一直線上を運動するとき、この運動を**等加速度直線運動**という。一定の加速度を a 、時刻 $t=0$ における初速度を v_0 、時刻 t における速度を v 、時刻 t までの変位を x とすると、

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

整理 等速円運動

質量 m の物体が点 O を中心に半径 r の等速円運動をするとき、物体の速さを v 、向心力の大きさを F とすると、向心方向の運動方程式は、

$$m \frac{v^2}{r} = F$$

となる。角速度を ω とすると、

$$v = r\omega$$

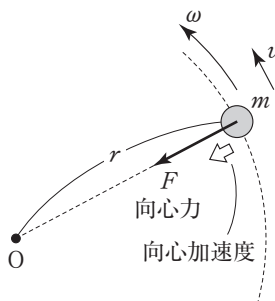
であるから、運動方程式は、

$$mr\omega^2 = F$$

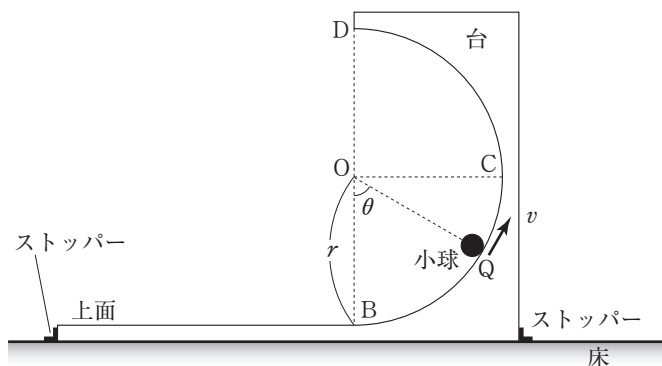
となる。円運動の周期を T とすると、

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

である。



問2 半円筒面に沿って点Bから点Dまで運動するとき、角度が θ となる点をQ、点Qにおける小球の速さを v とする。



点Bと点Qについて、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m (\sqrt{5gr})^2 = \frac{1}{2} mv^2 + mgr(1 - \cos \theta)$$

よって、

$$v = \sqrt{gr(3 + 2 \cos \theta)} \quad \cdots \cdots (i)$$

である。 $\theta = \pi$ のとき、

$$v = \sqrt{gr(3 - 2)} = \sqrt{gr} = v_1$$

となることが確認できる。

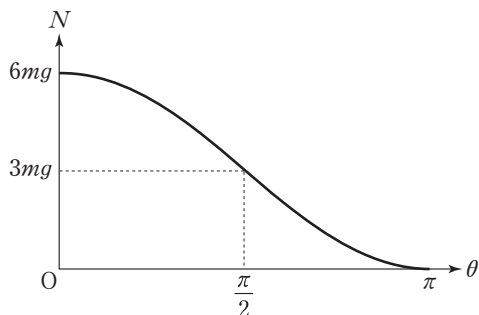
点 Q における円運動の運動方程式より、

$$m \frac{v^2}{r} = -mg \cos \theta + N \quad \text{よって、} N = \frac{mv^2}{r} + mg \cos \theta$$

である。(i)式を代入して、

$$N = 3mg(1 + \cos \theta)$$

となる。したがって、 N を θ で表したグラフは次図のようになる。



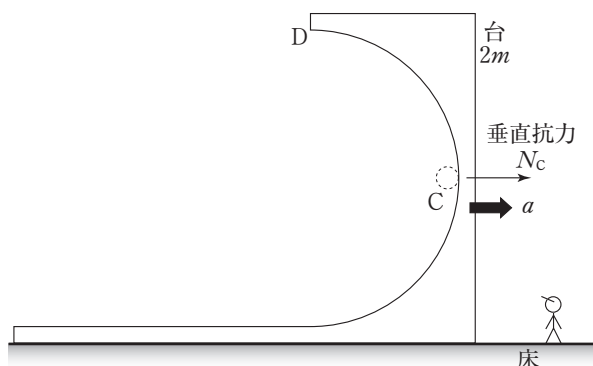
(答) 22 ⋯ ⑤

問3 小球が点 C を通過するとき、床に対する小球の速度の水平成分と、床に対する台の速度は等しく、台に対する小球の相対速度は鉛直上向きである。また、小球が点 C を通過するとき、台に対する相対速度の大きさが 0 より大きければ、小球は点 C を通過してさらに半円筒面に沿って運動する。

本問は小球が点 C を通過する瞬間において、小球と台の運動方程式を考える内容である。このとき、小球と台の間に作用する力は水平方向の垂直抗力であり、大きさを N_C とすると、台について、水平方向の運動方程式は、

$$2ma = N_C \quad \cdots \cdots (ii)$$

となる。



小球の運動が円運動として観測されるのは、台の上面から観測した場合である。小球が点 C を通過するとき、台の加速度が水平右向きであることを考慮すると、次図のように、台の上面の観測者 P から見て、小球には水平左向きに大きさ ma の慣性力が作用する。観測者 P から見た小球の円運動について、向心加速度の大きさは $\frac{(\sqrt{gr})^2}{r}$ であるから、運動方程式は、

$$m \frac{(\sqrt{gr})^2}{r} = N_c + ma$$

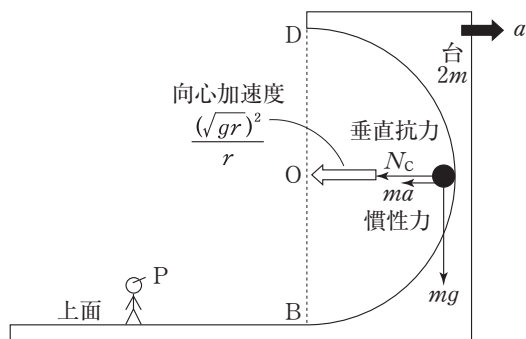
となる。(ii)式を代入して、

$$mg = 2ma + ma \quad \text{よって、} a = \frac{1}{3}g$$

であり、このとき、

$$N_c = 2ma = \frac{2}{3}mg$$

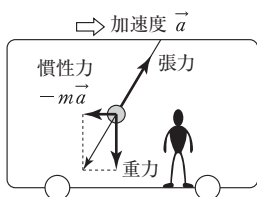
である。



(答) 23…⑤

整理 慣性力

加速度 $\vec{a}$ で運動する観測者から、質量 m の物体を見たときの運動方程式や力のつり合いの式には、実在する力以外に $-m\vec{a}$ の力を書き加えなければならない。この $-m\vec{a}$ を **慣性力** と呼ぶ。また、加速度運動する座標系を **非慣性系** という。



問4 小球が台の半円筒面に沿って点Bから点Cまで運動する間、小球と台は垂直抗力を及ぼし合い、水平方向の運動量の和が保存される。水平右向きを正とし、小球に与えた初速度の大きさを V_0 とすると、運動量保存則より、

$$mV_0 = mv_1 + 2mv_1 \quad \text{よって、} V_0 = 3v_1$$

である。また、小球と台の間、および床と台の間には摩擦力が作用しないため、小球と台の力学的エネルギーの和が保存される。小球の速度について、鉛直上向きの成分の大きさが $\sqrt{gr}$ であるから、力学的エネルギー保存則は、

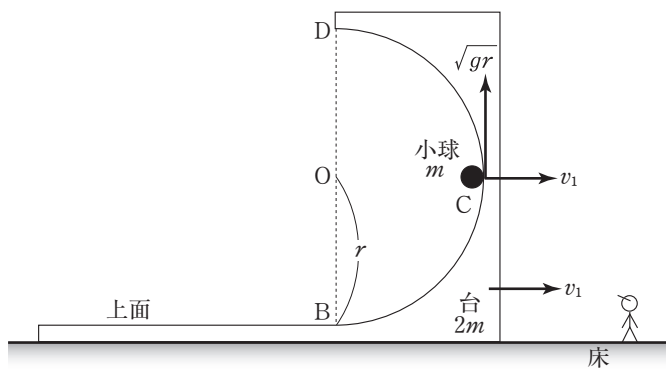
$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \overbrace{\frac{1}{2}m\{(\sqrt{gr})^2 + v_1^2\}}^{\text{点Cにおける小球の運動エネルギー}} + mgr + \frac{1}{2} \cdot 2mv_1^2$$

となる。 $V_0 = 3v_1$ を代入して整理すると、

$$\frac{1}{2}m(3v_1)^2 = \frac{3}{2}mgr + \frac{3}{2}mv_1^2 \quad \text{よって、} v_1 = \sqrt{\frac{gr}{2}}$$

を得る。

2つの物体に水平方向において内力のみが作用するとき、水平方向の運動量が保存される。



(答) 24 ... ④, 25 ... ①