

第1問 三角関数、指数関数・対数関数

[1]

▶ 出題のねらい

- 三角関数の定義から点 $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ の位置をつかめるか。
- $\sin \theta, \cos \theta$ の2次式を、2倍角の公式や三角関数の合成を用いて $r \sin(2\theta + \alpha) + k$ (r, α, k は定数) の形に変形できるか。

▶ 解説

(1)

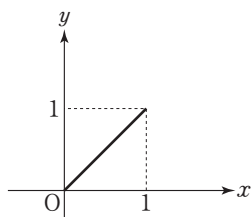
(i) $X=t, Y=t$ より、

$$Y=X$$

であり、 $0 \leq t \leq 1$ より、

$$0 \leq X \leq 1$$

であるから、点 (X, Y) は下図の太線のような図形を描く。



すなわち、求める選択肢は、

④

……ア

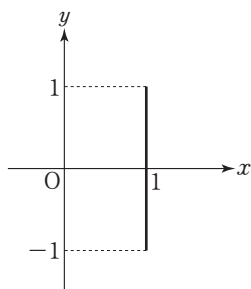
である。

(ii) $X=1, Y=\sin 2\pi t$ において、

$0 \leq t \leq 1$ より $0 \leq 2\pi t \leq 2\pi$ であり、

$$X=1, -1 \leq Y \leq 1$$

であるから、点 (X, Y) は下図の太線のような図形を描く。



すなわち、求める選択肢は、

③

……イ

である。

(iii) $2\pi t = \theta$ とおくと、

$$(X, Y) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であり、 $0 \leq t \leq 1$ より、

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。

点 (X, Y) が $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ となるのは、

①より、

$$(\cos \theta, \sin \theta) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

のときであり、②より、

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{1}{6}$$

……ウ

のときである。

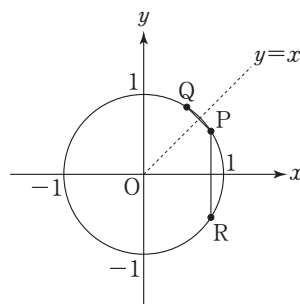
次に、①、②より、点 (X, Y) は、

点 $(\underline{0}, \underline{0})$ を中心とし、半径 $\underline{1}$ の円

……エ、オ、カ

を描く。

(2)



$2\pi t = \theta$ とおく。

$P(\cos \theta, \sin \theta), Q(\sin \theta, \cos \theta), R(\cos \theta, -\sin \theta)$

であるから、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= 2(\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 2(1 - 2 \sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PR^2 &= (2 \sin \theta)^2 \\ &= 4 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} PQ^2 + PR^2 &= 2(1 - 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta) \\ &= 2\left(1 - \sin 2\theta + 2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) \\ &= 4 - 2(\sin 2\theta + \cos 2\theta) \\ &= \underline{4} - \underline{2}(\sin \underline{4\pi t} + \cos \underline{4\pi t}) \end{aligned}$$

……キ、ク、ケ

$$=4-2\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$$

……コ, サ, シ

となる。

$$PQ^2+PR^2=3 \text{ より,}$$

$$4-2\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=3$$

$$\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{……③}$$

であり, $0 \leq t \leq 1$ より,

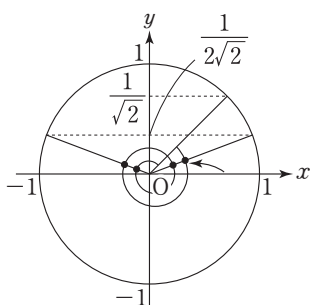
$$\frac{\pi}{4} \leq 4\pi t + \frac{\pi}{4} \leq 4\pi + \frac{\pi}{4} \left(= \frac{17}{4}\pi \right)$$

であるから, ③かつ $0 \leq t \leq 1$ を満たす t の値は下図より,

4 個

……ス

ある。



そのうち最大の t の値は, 図の矢印を付けたものに対応する角であり,

$$0 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$$

より,

$$4\pi < 4\pi t + \frac{\pi}{4} < 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{15}{4}\pi < 4\pi t < \frac{47}{12}\pi$$

よって,

$$\frac{15}{16} < t < \frac{47}{48} \quad \text{……④}$$

……セ

の範囲にある。

アドバイス

$\sin\theta, \cos\theta$ の 2 次式の変形

本問(2)で, $P(\cos\theta, \sin\theta)$ とすると PQ^2, PR^2 は,

$$PQ^2=2(1-2\sin\theta\cos\theta)$$

$$PR^2=4\sin^2\theta$$

と $\sin\theta, \cos\theta$ の 2 次式で表される。次に, PQ^2+PR^2 は 2 倍角の公式より,

$$PQ^2+PR^2=4-2(\sin 2\theta+\cos 2\theta)$$

と $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ の 1 次式に書き換えられる。

「2 倍角の公式を利用して $\sin\theta, \cos\theta$ の 2 次式を $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ の 1 次式に変形する」という式変形を理解しよう。

さらに, 三角関数の合成を用いて, PQ^2+PR^2 は,

$$r \sin(2\theta+\alpha)+k \quad (r, \alpha, k \text{ は定数})$$

の形に変形できて, PQ^2+PR^2 の値の変化について調べることができる。設問キ, ク, ケから設問コ, サ, シの式変形の流れをしっかりと理解して, 公式を適用できるようにしよう。

[2]

▶ 出題のねらい

- 対数関数のグラフの対称移動, 平行移動を理解しているか。
- 対数の性質を利用して式変形ができるか。
- グラフを手がかりに関数の値の大小比較ができるか。

▶ 解説

$$C: y=f(x)=\log_2 x$$

- (1) C を直線 $x=0$, すなわち y 軸に関して対称移動した曲線の方程式は,

$$y=\log_2(-x) \quad \text{……①}$$

であり, C を直線 $y=-x$ に関して対称移動した曲線の方程式は, C において x を $-y$, y を $-x$ に置き換えて,

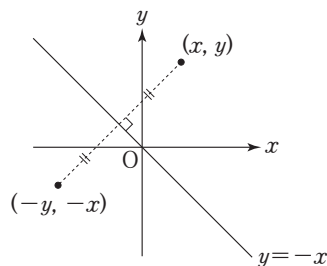
$$-x=\log_2(-y)$$

$$-y=2^{-x}$$

$$y=-2^{-x} \quad \text{……②}$$

……タ

である。



(2)

- (i) D の方程式は,

$$y+2=\log_2(x+8)$$

$$y=\log_2(x+8)-2 \quad \text{……(*)}$$

であり, 各選択肢の右辺が(*)の右辺と一致する

かを調べる。

⑦の右辺は明らかに一致しない。

⑧の右辺は(*)の右辺そのものである。

⑨の右辺は、

$$\log_2 \frac{x-8}{4} = \log_2 (x-8) - 2$$

より、一致しない。

⑩の右辺は、

$$\log_2 \frac{x+8}{4} = \log_2 (x+8) - 2$$

より、一致する。

⑪の右辺は、

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 \frac{4}{x+8}}{\log_2 \frac{1}{2}} &= \frac{2 - \log_2 (x+8)}{-1} \\ &= \log_2 (x+8) - 2 \end{aligned}$$

より、一致する。

⑫の右辺は、

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 \frac{4}{x-8}}{\log_2 \frac{1}{2}} &= \frac{2 - \log_2 (x-8)}{-1} \\ &= \log_2 (x-8) - 2 \end{aligned}$$

より、一致しない。

以上より、求める選択肢は、

①, ③, ④

……チ, ツ, テ

である。

(ii) $D: y=g(x)=\log_2(x+8)-2$

より、関数 $g(x)$ の定義域は、

$$x+8>0$$

すなわち、

$$\begin{aligned} x &> -8 \\ (\cdots \cdots \textcircled{2}) \end{aligned}$$

……ナニ

……ト

であり、値域は、

実数全体 (……③)

……ヌ

である。

$f(x)=g(x)$ となる x の値を求めると、

$$\log_2 x = \log_2 (x+8) - 2$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{x+8}{4}$$

$$x = \frac{x+8}{4}$$

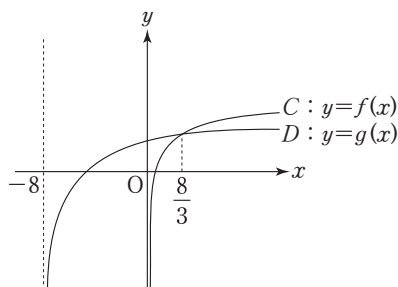
$$x = \frac{8}{3}$$

であり、 $x>0$ かつ $x>-8$ を満たす。

したがって、2 曲線

$$C: y=f(x), D: y=g(x)$$

を図示すると次図のようになる。



これより、

$$0 < x < \frac{8}{3} \text{ のとき, } f(x) < g(x) \quad \cdots \cdots \text{ネ, ノ}$$

(……⑦) ……ハ

$$x = \frac{8}{3} \text{ のとき, } f(x) = g(x)$$

(……⑩) ……ヒ

$$\frac{8}{3} < x \text{ のとき, } f(x) > g(x)$$

(……⑨) ……フ

が成り立つ。

アドバイス

対数関数のグラフ

対数関数のグラフを考えるときは、次の特徴を
押さえよう。

- 通ることが分かる点… 本問の曲線 C では点 $(1, 0)$
- 漸近線… 本問の曲線 C では y 軸
- 増加か減少か

これらを手がかりにグラフの概形を描いて考えよう。

2 次関数のグラフに比べ、対数関数のグラフを描く経験は少ないかもしれないが、グラフの問題はグラフを描いて考えることが原則である。

第 2 問 微分法・積分法

▶ 出題のねらい

- 定積分で与えられた関数 $f(x)$ について、与えられた条件から $f(x)$ を求められるか。
- 曲線外の 1 点から引いた接線を求める考え方を理解できているか。
- 曲線外の 1 点から引いた接線の本数を、3 次方程式の実数解の個数に言い換えて考えられるか。

▶ 解説

$$f(x) = \int_a^x (3t^2 - 2) dt$$

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 2 \quad \dots\dots \text{ア, イ, ウ}$$

であり, $f'(x)$ の符号が, $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ の前後で正から負に変わり, $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ の前後で負から正に変わるから, 関数 $f(x)$ は,

極大値と極小値をもつ。 (……①) ……エ

$$(2) f(x) = [t^3 - 2t]_a^x \\ = (x^3 - 2x) - (a^3 - 2a)$$

において, $f(1) = 0$ より,

$$-1 - (a^3 - 2a) = 0$$

$$a^3 - 2a + 1 = 0$$

$$(a-1)(a^2 + a - 1) = 0$$

$$a = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots \text{オ} \sim \text{ク}$$

であり,

$$a^3 - 2a = -1$$

より,

$$f(x) = (x^3 - 2x) - (-1) \\ = x^3 - 2x + 1 \quad \dots\dots \text{ケ, コ, サ}$$

である。

(3) l は C 上の点 $T(t, t^3 - 2t + 1)$ における接線であるから,

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

より, その方程式は,

$$y - (t^3 - 2t + 1) = (3t^2 - 2)(x - t)$$

$$y = (3t^2 - 2)x - 2t^3 + 1 \quad \dots\dots (*) \quad \dots\dots \text{シ} \sim \text{ソ}$$

であり, この直線が点 $P(2, b)$ を通ることから,

$$b = (3t^2 - 2) \cdot 2 - 2t^3 + 1$$

$$-2t^3 + 6t^2 - 3 = b \quad \dots\dots \text{①} \quad \dots\dots \text{タ, チ, ツ}$$

が成り立つ。

$b = 1$ のとき, ①は,

$$-2t^3 + 6t^2 - 3 = 1$$

$$t^3 - 3t^2 + 2 = 0$$

$$(t-1)(t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$t = 1, 1 \pm \sqrt{3} \quad \dots\dots \text{テ, ト, ナ}$$

であり, t が異なると接線(*)も異なるので, 点

(2, 1) から曲線 C に引ける接線 l の本数は,

$$\underline{\underline{3}} \text{ 本} \quad \dots\dots \text{ニ}$$

である。

点 $(2, b)$ から曲線 C に引ける接線 l の本数は, t の方程式①の実数解の個数, すなわち, ty 平面上で曲線 $D: y = -2t^3 + 6t^2 - 3$ と直線 $y = b$ の共有点の個数に等しい。

そこで,

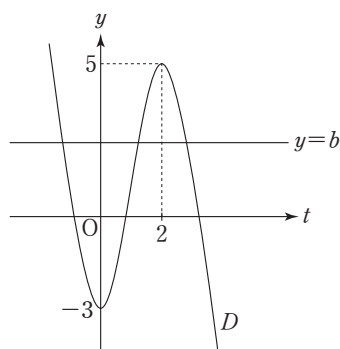
$$g(t) = -2t^3 + 6t^2 - 3$$

とおくと,

$$g'(t) = -6t^2 + 12t = -6t(t-2)$$

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$

より, D は下図のようになる。



したがって, 接線 l が 3 本引けるような b の値の範囲は,

$$-3 < b < 5 \quad \dots\dots \text{ヌ, ネ}$$

である。

さらに, 曲線 D と直線 $y = b$ はつねに共有点をもつから,

b がどのような値であっても, 点 P から曲線 C に接線が引ける。 (……①) ……ノ

$b = 1, t = 1$ のとき, 接線 l_1 の方程式は, (*) より,

$$l_1: y = x - 1 \quad \dots\dots \text{②}$$

であり, また,

$$C: y = x^3 - 2x + 1 \quad \dots\dots \text{③}$$

である。

②, ③から y を消去すると,

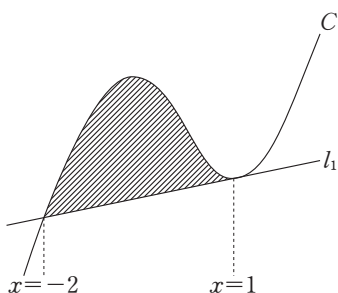
$$x^3 - 2x + 1 = x - 1$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0$$

$$x = 1, -2$$

であり, C と l_1 の位置関係は次図のようになる。



したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(x^3 - 2x + 1) - (x - 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{1}{4}(1 - 16) - \frac{3}{2}(1 - 4) + 2 \cdot (1 + 2) \\ &= \frac{27}{4} \quad \dots\dots \text{ハヒ, フ} \end{aligned}$$

である。

(注) S を次のように計算してもよい。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(x^3 - 2x + 1) - (x - 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x - 1)^2(x + 2) dx \\ &= \int_{-2}^1 (x - 1)^2\{(x - 1) + 3\} dx \\ &= \int_{-2}^1 \{(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x - 1)^4 + (x - 1)^3 \right]_{-2}^1 \\ &= -\frac{1}{4}(-3)^4 - (-3)^3 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

アドバイス

曲線外の点から引いた接線

曲線外の点 P から引いた接線の方程式を求めるには、次のように考える。

- 接点の x 座標 t が求まれば、接線の方程式が求まるから、 t を求める方程式を作ろう。
- それには、接線の方程式を t を用いて表して、この直線が点 P を通ることから t の方程式を得る。

本問(3)では、①式が接点の x 座標 t を求める方程式である。①式を導く過程をよく理解し、方程

式①の解の条件を考えよう。

第3問 確率分布と統計的推測

▶ 出題のねらい

- 正規分布表を用いて確率を求められるか。
- 母集団が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うときの標本平均の分布を扱えるか。
- 確率変数の和の平均、分散が求められるか。
- 母平均の推定において、信頼区間の幅を求められるか。

▶ 解説

$$(1) \quad Z = \frac{X - 40.4}{0.8}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &P(40 \leq X \leq 42) \\ &= P\left(\frac{40 - 40.4}{0.8} \leq Z \leq \frac{42 - 40.4}{0.8}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{2}{2}\right) \quad \dots\dots \text{ア, イ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.1915 + 0.4772 \quad (\text{正規分布表より}) \\ &= 0.6687 \end{aligned}$$

より、小数第4位を四捨五入すると、

$$\underline{\underline{0.669}} \quad \dots\dots \text{ウエオ}$$

である。

また、

$$\begin{aligned} &P(X > 42) \\ &= P(Z > 2) \\ &= P(0 \leq Z) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \quad (\text{正規分布表より}) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

より、小数第4位を四捨五入すると、

$$\underline{\underline{0.023}} \quad \dots\dots \text{カキク}$$

である。

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

であるから、

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \frac{1}{4}\{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)\} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4m \\ &= m \\ &= 40.4 \end{aligned}$$

であり、 X_1, X_2, X_3, X_4 は互いに独立であるから、

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \{V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4)\} \\ &= \frac{1}{16} \cdot 4\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{4} \\ \sigma(\bar{X}) &= \sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sigma}{2} = 0.4 \end{aligned}$$

である。

X は正規分布に従うので、 $\bar{X}$ は平均 40.4、標準偏差

$$\underline{\underline{0.4}} \quad \dots\dots\text{ケ, コ}$$

の正規分布に従う。したがって、

$$\bar{Z} = \frac{\bar{X} - 40.4}{0.4}$$

とくと、 $\bar{Z}$ は標準正規分布に従う。

よって、

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 42) \\ &= P\left(\bar{Z} > \frac{42 - 40.4}{0.4}\right) \\ &= P(\bar{Z} > 4) \\ &= P(0 \leq \bar{Z}) - P(0 \leq \bar{Z} \leq 4) \\ &< 0.5 - P(0 \leq \bar{Z} \leq 3.09) \\ &= 0.5 - 0.4990 \\ &= 0.001 \end{aligned}$$

であるから、これは、

$$\underline{\underline{0.002 \text{ 未満}}} \quad (\dots\dots\underline{\underline{0}}) \quad \dots\dots\text{サ}$$

である。

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 40$$

であるから、

$$\begin{aligned} m_Y &= E(Y) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + 40 \\ &= 4m + 40 \\ &= 4 \cdot 40.4 + 40 \\ &= \underline{\underline{201.6}} \quad \dots\dots\text{シ} \sim \text{ソ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) \\ &= 4\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = 2\sigma = \underline{\underline{1.6}} \quad \dots\dots\text{タ, チ}$$

である。

これより、 $\frac{Y - 201.6}{1.6}$ は標準正規分布に従う。

ここで、

$$P(X > 42) = P(Z > 2) \quad \dots\dots\underline{\underline{1}} \quad \text{①}$$

(Z は標準正規分布に従う)

であった。

$$\frac{Y - 201.6}{1.6}, Z \text{ はともに標準正規分布に従うので,}$$

$$P\left(\frac{Y - 201.6}{1.6} > 2\right) = P(Z > 2) \quad \dots\dots\underline{\underline{2}} \quad \text{②}$$

①, ②より、

$$P\left(\frac{Y - 201.6}{1.6} > 2\right) = P(X > 42)$$

すなわち、

$$P(Y > 204.8) = P(X > 42)$$

である。

よって、小数第 1 位を四捨五入した整数値で考えると、商品 1 箱あたりの重さが、

$$\underline{\underline{205 \text{ g}}} \quad \dots\dots\text{ツ} \sim \text{テ}$$

より大きい確率は、 X が 42 より大きい確率と等しい。

(2) 標本平均を X' とすると、平均 m の信頼度 95% の信頼区間は、

$$X' - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq X' + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

n : 標本の大きさ

σ : 母標準偏差

で与えられ、

$$n = 100, \sigma = 0.5$$

である。

したがって、その幅は、

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{1.96}{10}$$

$$= \underline{\underline{0.196}} \quad \dots\dots\text{ナ} \sim \text{ネ}$$

である。

アドバイス

標本平均の分布

母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から無作為抽出された大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ は、 n が大きければ正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなせる。

母集団分布が正規分布のときは、 n が大きくなくても $\bar{X}$ は $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

本問の設問ケ、コ、サでは、標本平均 $\bar{X}$ の分布について問うている。平均が 40.4 g であるから、ミニケーキ 1 個の重さが 42 g を超える確率より、4 個のミニケーキの重さの平均が 42 g を超える

確率の方が小さくなることは直観的にも納得できるだろう。確率分布の問題では、具体的な事象を思い浮かべて考えよう。

第4問 数列

▶ 出題のねらい

- 与えられた漸化式から、初めの何項かを求めて一般項を推測し、数学的帰納法による証明ができるか。
- 与えられた漸化式から、誘導により置き換えを行って一般項を求められるか。

▶ 解説

$$a_1 = 2, \\ n(a_{n+1} - a_n - 1) = 2a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ①$$

(1) ①より、

$$na_{n+1} = (n+2)a_n + n \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n + 1 \quad \dots\dots ①'$$

であり、①'より順次求めると、

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = \underline{7} \quad \dots\dots \text{ア}$$

$$a_3 = \frac{4}{2}a_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = \underline{15} \quad \dots\dots \text{イウ}$$

$$a_4 = \frac{5}{3}a_3 + 1 = \frac{5}{3} \cdot 15 + 1 = \underline{26} \quad \dots\dots \text{エオ}$$

$$a_5 = \frac{6}{4}a_4 + 1 = \frac{3}{2} \cdot 26 + 1 = \underline{40} \quad \dots\dots \text{カキ}$$

である。

(i) これより、 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ について、

$$b_1 = a_2 - a_1 = 5$$

$$b_2 = a_3 - a_2 = 8$$

$$b_3 = a_4 - a_3 = 11$$

$$b_4 = a_5 - a_4 = 14$$

となるので、 $\{b_n\}$ は初項が5、公差が3の等差数列、すなわち、

$$b_n = 5 + (n-1) \cdot 3 \\ = \underline{3n+2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ②$$

……ク、ケ

と推測できる。

このとき、 $a_1 = 2$ と②より、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k+2)$$

$$= 2 + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1) \\ = \frac{3n^2 + n}{2}$$

であり、 $a_1 = 2$ であるから、 $n=1$ のときも含めて、

$$a_n = \frac{3n^2 + n}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ③$$

……コ、サ

と推測できる。

(ii) すべての自然数 n について③が成り立つことを、以下の

数学的帰納法 (……②) ……シ

を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき、③の右辺は2であり、

$a_1 = 2$ であるから③は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、③が成り立つ、すなわち、

$$a_k = \frac{3k^2 + k}{2} \quad (\dots\dots ④) \quad \dots\dots ④$$

……ス

と仮定する。

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}a_k + 1 \quad \dots\dots ⑤$$

であるから、⑤に④を代入すると、

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot \frac{3k^2 + k}{2} + 1 \\ = \frac{(k+2)(3k+1)}{2} + 1 \\ = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \quad \dots\dots \text{セ、ソ、タ} \\ = \frac{3(k+1)^2 + (k+1)}{2} \quad (\dots\dots ⑤) \\ \dots\dots \text{チ}$$

となり、

$$n = \underline{k+1} \quad (\dots\dots ②) \quad \dots\dots \text{ツ}$$

のときにも③は成り立つ。

[1], [2]から、すべての自然数 n について③が成り立つ。

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n + 1 \quad \dots\dots ①'$$

の両辺を、

$$(n+1)(n+2) \quad \dots\dots \text{テ}$$

で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

となるので、

$$c_n = \frac{a_n}{n(n+1)} \quad \dots\dots ⑥$$

とおくと,

$$c_{n+1} = c_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

であり, また, ⑥より,

$$c_1 = \frac{a_1}{1 \cdot 2} = 1 \quad \dots\dots \text{ト}$$

である。

よって, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots\dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3n+1}{2(n+1)} \quad \dots\dots \text{⑦} \quad \dots\dots \text{ナ} \sim \text{ネ} \end{aligned}$$

であり, これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって, ⑥, ⑦より,

$$\begin{aligned} a_n &= n(n+1)c_n \\ &= n(n+1) \cdot \frac{3n+1}{2(n+1)} \\ &= \frac{n(3n+1)}{2} \\ &= \frac{3n^2+n}{2} \end{aligned}$$

である。

アドバイス

複数の解法

本問では, 一つの問題に 2 通りの解法があげられている。共通テストでは解法の過程を重視するというコンセプトから, 複数の解法でアプローチするという出題があるかもしれない。「この問題は, この解法で解く」と固定しないで, 別解にも関心を持つ。

本問(1)の花子さんの解法では, $\{b_n\}$ が等差数列であると推測したので, $a_n = \frac{3n^2+n}{2} \dots\dots \text{③}$

が成り立つことを数学的帰納法で証明しなければならない。一方, (2)の太郎さんの解法では,

$c_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$ とおくことに気づくことが難しい。

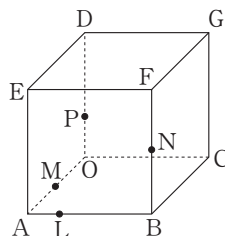
解法ごとのメリット, デメリットも考えて他の問題を解くときに活用できるようにしよう。

第5問 ベクトル

▶ 出題のねらい

- 空間ベクトルにおいて, ベクトルのなす角を内積を用いて考えられるか。
- 点 N が平面 MPL 上にあるための条件
 $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{MP} + t\overrightarrow{ML}$ (s, t は実数)
 において, s, t の値を求められるか。
- 等式 $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MP} + 4\overrightarrow{ML}$ から, 線分 PL と線分 MN の交点の位置を求められるか。

▶ 解説



$\overrightarrow{OA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{z}$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OL} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} \end{aligned}$$

であり, 同様に,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{x}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OD} = a\vec{z}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} \\ &= a\vec{z} - \frac{1}{2}\vec{x} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{x} + a\vec{z} \quad \dots\dots \text{①}$$

……ア, イ

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM}$$

$$= \left(\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} \right) - \frac{1}{2}\vec{x}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} \quad \dots\dots \text{②}$$

……ウ, エ

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$$

$$= \left(\vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z} \right) - \frac{1}{2}\vec{x}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

……オ，カ

である。

(1) ①，②より，

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{ML} = \left(-\frac{1}{2}\vec{x} + a\vec{z} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} \right)$$

$$= -\frac{1}{4}|\vec{x}|^2 - \frac{1}{8}\vec{x} \cdot \vec{y} + \frac{a}{2}\vec{x} \cdot \vec{z} + \frac{a}{4}\vec{y} \cdot \vec{z}$$

であり，

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = 1, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

を用いると，

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{-1}{4}$$

……キク，ケ

であり，同様に，

$$|\overrightarrow{MP}|^2 = \left| -\frac{1}{2}\vec{x} + a\vec{z} \right|^2 = \frac{1}{4} + a^2$$

$$|\overrightarrow{ML}|^2 = \left| \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

すなわち，

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\frac{1}{4} + a^2}, \quad |\overrightarrow{ML}| = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

である。

これより， $\angle PML = \theta$ とおくと，

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{ML} = |\overrightarrow{MP}| |\overrightarrow{ML}| \cos \theta$$

$$-\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} \cos \theta$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + a^2} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

である。

$\theta = 135^\circ$ のとき，④より，

$$\sqrt{\frac{1}{4} + a^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + a^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{4} + a^2 = \frac{2}{5}$$

$$a^2 = \frac{3}{20}$$

であり， $0 < a < 1$ より，

$$a = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

……コサ，シス

である。

また，④より，

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5\left(\frac{1}{4} + a^2\right)}}$$

であるから， a の値が $0 < a < 1$ の範囲で増加するにしたがって， $\cos \theta$ の値は増加する。

ここで， $0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから，

$\cos \angle PML$ の値は増加し， $\angle PML$ の大きさは減少する。 (……①) ……セ

(2) $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{MP} + t\overrightarrow{ML}$ ……(*)

①，②，③を(*)に代入すると，

$$\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z} = s\left(-\frac{1}{2}\vec{x} + a\vec{z}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y}\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z} = \frac{-s+t}{2}\vec{x} + \frac{t}{4}\vec{y} + as\vec{z}$$

となり，4点O，A，C，Dは同一平面上にないから，

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{-s+t}{2} & \cdots \cdots \textcircled{5} \\ 1 = \frac{t}{4} & \cdots \cdots \textcircled{6} \\ \frac{1}{2} = as & \cdots \cdots \textcircled{7} \end{cases}$$

を得る。

⑤，⑥を s ， t について解くと，

$$s = \frac{3}{4}, \quad t = \frac{4}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{ツ}, \quad \textcircled{タ}$$

であり，⑦に代入すると，

$$a = \frac{1}{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{チ}, \quad \textcircled{ツ}$$

である。

これより，

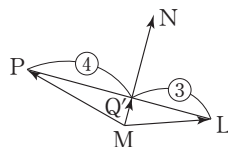
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= 3\overrightarrow{MP} + 4\overrightarrow{ML} \\ &= 7 \cdot \frac{3\overrightarrow{MP} + 4\overrightarrow{ML}}{7} \end{aligned}$$

であるから，

$$\overrightarrow{MQ'} = \frac{3\overrightarrow{MP} + 4\overrightarrow{ML}}{7}$$

とすると，点 Q' は線分PLを4:3に内分する点であり，

$$\overrightarrow{MN} = 7\overrightarrow{MQ'}$$



したがって，2点Q，Q'は一致するので，点Qは線分PLを，

$$4:3 = 1:\frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{テ}, \quad \textcircled{ト}$$

に内分する。

平面 π と直線 CG の交点を R とすると、点 R は直線 CG 上にあるから、実数 u を用いて、

$$\overrightarrow{CR} = u\overrightarrow{CG} = u\overrightarrow{z}$$

と表すことができ、

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{y} + u\overrightarrow{z}$$

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OM}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + u\overrightarrow{z} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

である。

また、点 R は平面 π 上にあるから、 $(*)$ と同様にすると、実数 s' 、 t' を用いて、

$$\overrightarrow{MR} = s'\overrightarrow{MP} + t'\overrightarrow{ML}$$

$$= \frac{-s' + t'}{2}\overrightarrow{x} + \frac{t'}{4}\overrightarrow{y} + as'\overrightarrow{z} \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$$\left(\text{ここに、} a = \frac{1}{6} \right)$$

と表すことができる。

したがって、 $\textcircled{8}$ 、 $\textcircled{9}$ と、4 点 O 、 A 、 C 、 D は同一平面上にないことから、

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{-s' + t'}{2} \\ 1 = \frac{t'}{4} \\ u = as' = \frac{s'}{6} \end{cases}$$

であり、これを解くと、

$$s' = 5, \quad t' = 4, \quad u = \frac{5}{6}$$

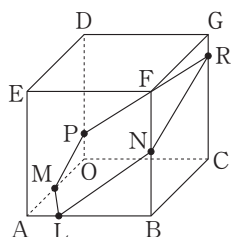
である。

よって、点 R は辺 CG 上にあり、平面 π による立方体 $OABC-DEFG$ の切り口は、下図のような

五角形 (…… $\textcircled{2}$)

……ナ

となる。



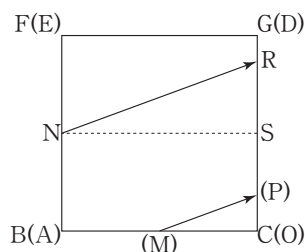
(注) 次のようにして、点 R が辺 CG 上にあることを確認してもよい。

立方体の面 $BCGF$ と面 $AODE$ は平行であるから、

$$\overrightarrow{NR} \parallel \overrightarrow{MP}$$

であり、面 $BCGF$ と面 $AODE$ を重ね合わせて図

示すると、次の図ようになる。



$$BC : MO = 2 : 1$$

であることも考えると、

$$\overrightarrow{NR} = 2\overrightarrow{MP} \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

を得る。

辺 CG の中点を S とすると、 $\textcircled{10}$ より、

$$\overrightarrow{SR} = 2\overrightarrow{OP}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}\overrightarrow{OD} \quad \left(a = \frac{1}{6} \text{ より} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$$

以上より、

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SR}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$$

$$= \frac{5}{6}\overrightarrow{CG}$$

となり、点 R は辺 CG 上にある。

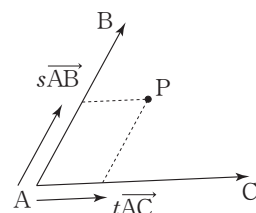
アドバイス

点 P が平面 ABC 上にあるための条件

空間内で点 P が平面 ABC 上にあるための条件は、実数 s 、 t を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad \cdots \cdots (*)$$

と表せることである。下のような図をイメージするとよい。本問(2)でテーマになる等式である。



平面と直線の交点を求めるときにも使われる条件であるから、 $(*)$ の形の等式がすぐ出てくるようにしよう。