

第1問 数と式、図形と計量

[1]

▶ 出題のねらい

- 絶対値の意味を理解し、それをもとに絶対値記号を含む不等式を正しく処理することができるか。
- 必要条件・十分条件を正しく理解しているか。

▶ 解説

(1) $a = -1$ のとき、

不等式①は、 $|4x+1| > 0$ であり、 $4x+1=0$ になるとき以外は成り立つ。

すなわち、

$$x = \frac{-1}{4} \quad \dots\dots \text{アイ, ウ}$$

以外のすべての実数 x で不等式①は成り立つ。

また、不等式②は $|4x^2+1| > 0$ であり、 $4x^2+1 \geq 1$ なので、

すべての実数 x は不等式②を満たす。
(……⑩) ……エ

$a < -1$ のとき、

不等式①、②の右辺はともに負の数で、左辺はすべての実数 x において①は 0 以上の数、②は正の数なので、

不等式①も不等式②もすべての実数 x について成り立つ。(……⑩) ……オ

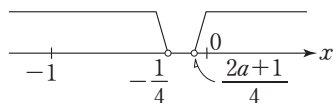
(2) $a > -1$ とするとき、 $a+1 > 0$ なので、

不等式①は、 $4x-a < -(a+1)$ 、 $4x-a > a+1$ より、

$$x < \frac{-1}{4}, \quad \frac{2a+1}{4} < x \quad \dots\dots \text{カ} \sim \text{コ}$$

である。

よって、すべての整数 x が不等式①を満たすのは、



$$\frac{2a+1}{4} < 0 \quad \text{すなわち、} \quad a < -\frac{1}{2}$$

のときで、 $a > -1$ と合わせて、

$$-1 < a < -\frac{1}{2} \quad (\dots\dots \text{⑩}) \quad \dots\dots \text{サ}$$

のときである。

(3) $a=0$ のとき、

$$p: x < -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} < x$$

$$q: |4x^2| > 1 \quad \text{すなわち、} \quad x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < x$$

なので、 $q \implies p$ は真、 $p \implies q$ は偽である

(反例: $x = \frac{1}{3}$)。

よって、 p は q であるための

必要条件であるが、十分条件ではない。

(……⑪) ……シ

$$a = -\frac{1}{2} \quad \text{のとき、}$$

$$q: \left| 4x^2 + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \quad \text{すなわち、} \quad x \neq 0$$

なので、 $r \implies q$ は真、 $q \implies r$ は偽である

(反例: $x = -1$)。

よって、 r は q であるための

十分条件であるが、必要条件ではない。

(……⑫) ……ス

アドバイス

不等式は数直線を利用しよう

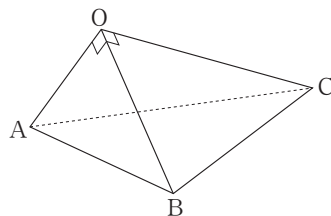
今回の問題のように、絶対値記号を含んだり、未定係数を含んだりする不等式の問題は、数直線を用いて、混乱を未然に防ぐとよい。

[2]

▶ 出題のねらい

- 立体において、三角形に着目して図形量を求めることができるか。
- 複数の方向から図形を考察することができるか。

▶ 解説



$\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCA$ はいずれも直角三角形なので、三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \dots\dots \text{セソ}$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \dots\dots \text{タ}$$

$$CA = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \quad \dots\dots \text{チ, ツ}$$

△ABCにおいて、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle ACB &= \frac{CA^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot BC} \\ &= \frac{(2\sqrt{5})^2 + 5^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5} \\ &= \frac{8}{5\sqrt{5}}\end{aligned}$$

よって、 $\angle ACB$ は鋭角であり、

$$\sin \angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} = \frac{\sqrt{61}}{5\sqrt{5}} \text{ なので、} \triangle ABC$$

の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{61}}{5\sqrt{5}} = \sqrt{61}$$

△OABを底面とする三角錐とみると、OCが高さとなり、

$$\text{高さは } 4$$

なので、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4$$

同じ立体を底面が△ABCの三角錐とみると、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OH \text{ なので、}$$

$$OH = \frac{12}{\sqrt{61}}$$

である。

アドバイス

立体も図は丁寧に描こう

図形問題は、問題文などに書かれた情報を整理するのに図を活用するのがよい。今回は立体だったが、四面体を様々な方向から見ることになった。必要に応じ、図を描き直ししながら整理してもよい。

第2問 2次関数、データの分析

[1]

▶ 出題のねらい

- 2次関数の式からグラフを想起できるか。
- 与えられた図形の条件から2次関数の式を立てられるか。

▶ 解説

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + a$$

$$= -\frac{1}{4}(x-2)^2 + a+1$$

頂点の座標は、

$$\left(\underline{2}, a+1 \right) \quad \dots\dots \text{ア, イ}$$

G が x 軸に接するのは、 $a+1=0$ より、

$$a = \underline{-1} \quad \dots\dots \text{ウエ}$$

このとき、

$$G: y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$$

$$P(p, 0), Q(p, p), R(p, bp),$$

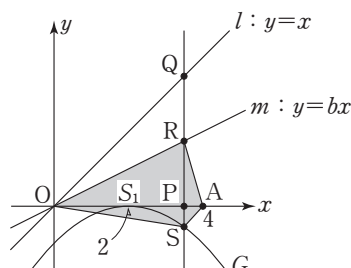
$$S\left(p, -\frac{1}{4}p^2 + p - 1\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot RS$$

$$= 2 \left\{ bp - \left(-\frac{1}{4}p^2 + p - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}p^2 + 2(b-1)p + 2 \quad \dots\dots \text{オ, カ}$$

$$S_2 = 2p$$



よって、

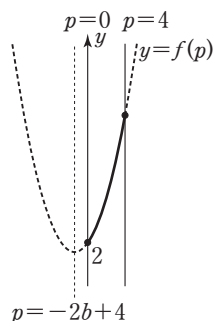
$$f(p) = S_1 - S_2$$

$$= \frac{1}{2}p^2 + 2(b-2)p + 2$$

$$= \frac{1}{2}(p + 2b - 4)^2 - 2b^2 + 8b - 6 \quad \dots\dots \text{キ} \sim \text{コ}$$

$0 \leq p \leq 4$ における $f(p)$ の最小値が $f(0)$ となるのは、
 $-2b + 4 \leq 0$

$$\underline{2} \leq b \quad \dots\dots \text{サ}$$



$$S_1 = S_2 \iff f(p) = 0$$

$S_1 = S_2$ となる p が存在するのは、 $0 \leq p \leq 4$ におけ

る $f(p)$ の最小値が 0 以下のときである。

$2 \leq b$ のとき、 $f(p)$ の最小値は $f(0)=2>0$ より不適。

$0 < b < 2$ のとき、 $0 < -2b+4 < 4$ であるから、 $f(p)$ の最小値は、

$$f(-2b+4) = -2b^2 + 8b - 6$$

したがって、

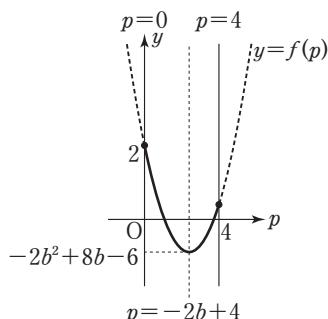
$$-2b^2 + 8b - 6 \leq 0$$

$$(b-3)(b-1) \geq 0$$

これと、 $0 < b < 2$ より、

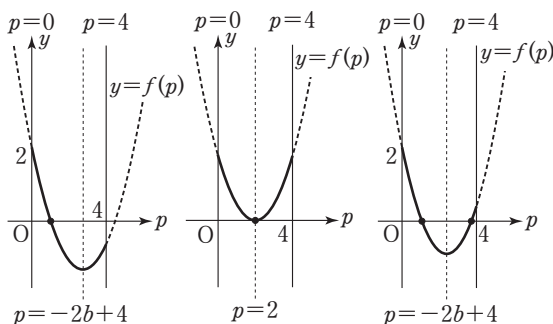
$$0 < b \leq 1$$

……シ



$0 < b \leq 1$ とする。

$S_1 = S_2 \iff f(p) = 0$ であるから、 $S_1 = S_2$ となるような点 P の位置の個数は、 $0 \leq p \leq 4$ で $y = f(p)$ のグラフと p 軸の共有点の個数と一致する。



$$f(4) < 0 \text{ のとき共有点 1 個 } \left(0 < b < \frac{3}{4}\right)$$

$f(4) \geq 0$ のとき

$$f(-2b+4) = 0 \text{ のとき共有点 1 個 } (b=1)$$

$$f(-2b+4) < 0 \text{ のとき共有点 2 個 } \left(\frac{3}{4} \leq b < 1\right)$$

であるから、

b の値によって、1 か所だけの場合と 2 か所ある場合がある。 (……③) ……ス

アドバイス

図を活用しよう

最大・最小を考察する問題は、条件が多く出てきて、うまく条件を整理する力が求められる。そのためには、図を描いて整理するのがよい。一回描いてうまくいかなくても、描き直して把握しなおすくらいの根気が欲しいものだ。

〔2〕

▶ 出題のねらい

- ・ヒストグラム、箱ひげ図、散布図を正しく読み取れるか。

▶ 解説

(1) データの値の個数が 78 なので、ヒストグラムより、

- ・最頻値は 420 円以上 450 円未満
- ・最小値は 330 円以上 360 円未満
- ・第 1 四分位数は 390 円以上 420 円未満
- ・中央値は 420 円以上 450 円未満
- ・第 3 四分位数は 420 円以上 450 円未満
- ・最大値は 600 円以上 630 円未満

の階級に含まれることがわかる。

よって、(I)は誤り。(II)は正しい。

また、範囲は、

$$600 - 360 = 240 \text{ (円)}$$

より大きく、四分位範囲は、

$$450 - 390 = 60 \text{ (円)}$$

より小さい。

よって、(III)は正しい。

以上より、求める選択肢は、

④

……セ

(2) 箱ひげ図より、次のことがわかる。

2020 年の 12 月において、中央値は、最大値と最小値の平均値より小さい。よって、⑩は正しくない。

2019 年の 8 月において、中央値は、第 1 四分位数と第 3 四分位数の平均値より小さい。よって、①は正しい。

12 月においては、2020 年の最大値の方が 2019 年の最大値より小さい。よって、②は正しくない。

4 月および 8 月においては、2020 年の最小値の方が 2019 年の最小値より大きい。よって、③は正しくない。

2020 年の三つの月で範囲が最小の月は 4 月であるが、最小値は最小でない。よって、④は正しくない。

2019 年の三つの月で四分位範囲が最小の月は 4 月であり、最小値も最小である。よって、⑤は正しい。

以上より、求める選択肢は、

①、⑤

……ソ，タ

(3) 散布図より、次のことがわかる。

レタスとキャベツの年平均価格の相関の方が、レタスとトマトの年平均価格の相関より強い。

よって、(I)は正しい。

キャベツの年平均価格が最大である市のレタスの年平均価格は約 480 円。

トマトの年平均価格が最大である市のレタスの年平均価格は 420 円未満。

よって、(II)は誤り。

トマトの年平均価格が 600 円以下であるどの市も、レタスの年平均価格は 420 円未満。

レタスの年平均価格が 420 円未満であるどの市も、キャベツの年平均価格が 200 円以下である。

よって、(III)は正しい。

以上より、求める選択肢は、

②

……チ

(4) (i)(ii)より、福山市の散布図は b 。

(i)(iii)より、東京都区部の散布図は a 。

よって、求める選択肢は、

①

……ツ

アドバイス

用語の定義

データの分析の分野では、他の分野であまり使わないような用語がいろいろある。四分位数、箱ひげ図、散布図、相関係数などである。これらの定義を正確に理解して覚えなければ、問題を解くことができない。まずは教科書などで復習して、データの分析の分野での用語を正しく使えるようになる。

第 3 問 場合の数と確率

▶ 出題のねらい

- 顔認識システムの精度を確率を使って考察することができるか。

▶ 解説

(1) 条件付き確率の考え方より、システム 1 が「顔」と認識した画像が顔の画像である確率は、

$$P_{S_1}(F) \quad (\cdots \cdots \textcircled{3}) \quad \cdots \cdots \text{ア}$$

また、システム 1 の識別能力から、顔の画像を「顔」と認識する確率は、

$$P_F(S_1) = \frac{9}{10} \quad (\cdots \cdots \textcircled{2}) \quad \cdots \cdots \text{イ}$$

顔でない画像を「顔でない」と認識する確率は、

$$P_{\overline{F}}(\overline{S}_1) = \frac{7}{10} \quad (\cdots \cdots \textcircled{8}) \quad \cdots \cdots \text{ウ}$$

	S_1	$\overline{S}_1$	
F	$F \cap S_1$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}$	$F \cap \overline{S}_1$	
$\overline{F}$	$\overline{F} \cap S_1$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}$	$\overline{F} \cap \overline{S}_1$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10}$	

取り出した画像が、顔の画像であり、かつシステム 1 が「顔」と認識する確率は、

$$P(F \cap S_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20} \quad \cdots \cdots \text{エ，オカ}$$

取り出した画像をシステム 1 が「顔」と認識する確率は、

$$\begin{aligned} P(S_1) &= P(F \cap S_1) + P(\overline{F} \cap S_1) \\ &= \frac{9}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \cdots \cdots \text{キ，ク} \end{aligned}$$

システム 1 が「顔」と認識した画像が顔の画像である確率は、

$$P_{S_1}(F) = \frac{P(F \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{9}{20} \div \frac{12}{20} = \frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \text{ケ，コ}$$

(2)

	S_2	$\overline{S}_2$	
F	$F \cap S_2$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10}$	$F \cap \overline{S}_2$	
$\overline{F}$	$\overline{F} \cap S_2$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10}$	$\overline{F} \cap \overline{S}_2$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10}$	

システム 2 が「顔」と認識する事象を S_2 とする。

$$P(F \cap S_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} P(S_2) &= P(F \cap S_2) + P(\overline{F} \cap S_2) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P_{S_2}(F) = \frac{P(F \cap S_2)}{P(S_2)} = \frac{2}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \quad \dots\dots \text{サ, シ}$$

$$(3) \quad P_F(S_1) = \frac{9}{10}, \quad P_F(S_2) = \frac{8}{10} \text{ より,}$$

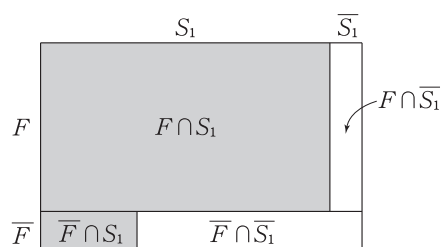
$$P_F(S_1) > P_F(S_2)$$

システム 1 の方が高い。(……①) ……ス

$$P_{S_1}(F) = \frac{3}{4}, \quad P_{S_2}(F) = \frac{4}{5} \text{ より,}$$

$$P_{S_1}(F) < P_{S_2}(F)$$

システム 2 の方が高い。(……②) ……セ



顔と顔でない画像の枚数の比が 4 : 1 のとき,

$$P_{S_1}(F) = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \div \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} \right) = \frac{36}{39} > \frac{3}{4}$$

よって,

$$\frac{3}{4} \text{ より大きい。} (……①) \quad \dots\dots \text{ソ}$$

アドバイス

図を活用しよう

場合の数や確率の問題では、変数の種類が多く出現しやすい。それぞれの変数同士の関係ももれなく、重複なく考察する力が求められる。その場合、図を使って整理することが有効である。使える図の種類が多ければ、よりうまく整理する方法を探すことができるようになるはずだ。解説の図の使い方もぜひ参考にしてみたい。

第 4 問 整数の性質

▶ 出題のねらい

- 記数法を自在に操ることができるか。

▶ 解説

$$(1) \quad 2022 = 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 6$$

$$= \underline{\underline{3746}}_{(8)} \quad \dots\dots \text{アイウエ}$$

$$T(2022) = 3 + 7 + 4 + 6 = \underline{\underline{20}} \quad \dots\dots \text{オカ}$$

$S(n) = 1$ となるのは,

$$n = 1, 10, 100, \dots\dots$$

であるから, $n > 64$ のとき $S(n) = 1$ を満たす最小の自然数は,

$$n = \underline{\underline{100}} \quad \dots\dots \text{キクケ}$$

$T(n) = 1$ となるのは,

$$n = 1_{(8)}, 10_{(8)}, 100_{(8)}, 1000_{(8)}, \dots\dots$$

すなわち,

$$n = 1, 8, 64, 512, \dots\dots$$

であるから, $n > 64$ のとき $T(n) = 1$ を満たす最小の自然数 n は,

$$n = \underline{\underline{512}} \quad \dots\dots \text{コサシ}$$

(2)

$$(i) \quad n + 40S(n) = 2022 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$n = 2022 - 40S(n)$$

$$= 10\{202 - 4S(n)\} + 2$$

であるから, n を 10 で割った余りは, $\underline{\underline{2}} \quad \dots\dots \text{ス}$

$$n = 10^3a + 10^2b + 10c + 2$$

(a, b, c は 0 以上 9 以下の整数)

とにおいて, ①に代入すると,

$$10^3a + 10^2b + 10c + 2 + 40(a + b + c + 2) = 2022$$

$$\underline{\underline{104a + 14b + 5c = 194}} \quad \dots\dots \text{②} \quad \dots\dots \text{セ〜ナ}$$

$$0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9 \text{ より,}$$

$$0 \leq 14b + 5c \leq 171$$

$$23 \leq 104a \leq 194 \quad (\text{②より})$$

$$0 \leq a \leq 9 \text{ であるから,}$$

$$a = \underline{\underline{1}} \quad \dots\dots \text{ニ}$$

②に代入して,

$$14b + 5c = 90$$

$$14b = 5(18 - c)$$

14 と 5 は互いに素であり,

$$0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9$$

であるから,

$$b = \underline{\underline{5}}, \quad c = \underline{\underline{4}} \quad \dots\dots \text{又, ネ}$$

したがって,

$$n = 1542$$

$$(ii) \quad n + 40T(n) = 2022 \quad \dots\dots \text{③}$$

$$n = 2022 - 40T(n)$$

$$= 8\{252 - 5T(n)\} + 6$$

n を 8 で割った余りは, $\underline{\underline{6}} \quad \dots\dots \text{ノ}$

③より,

$$(8^3d + 8^2e + 8f + 6) + 40(d + e + f + 6) = 2022$$

$$69d + 13e + 6f = 222 \quad \dots\dots \text{④}$$

$0 \leq e \leq 7, 0 \leq f \leq 7$ であるから、

$$0 \leq 13e + 6f \leq 133$$

$$89 \leq 69d \leq 222 \quad (\text{④より})$$

$0 \leq d \leq 7$ であるから、

$$d = 2, 3$$

$d = 2$ のとき、④に代入して、

$$13e + 6f = 84$$

$$13e = 6(14 - f)$$

13 と 6 は互いに素であり、 $0 \leq e \leq 7, 0 \leq f \leq 7$

であるから、

$$e = 6, f = 1$$

$d = 3$ のとき、④に代入して、

$$13e + 6f = 15$$

$$0 \leq e \leq 7, 0 \leq f \leq 7$$

より不適。

よって、

$$d = \underline{2}, e = \underline{6}, f = \underline{1}$$

……ハ～フ

$$n = 2616_{(8)}$$

である。

アドバイス

n 進法

n 進法とは、位取りの基礎を n として数を表す方法のこと。

$$a_1 \cdot n^{\blacksquare-1} + a_2 \cdot n^{\blacksquare-2} + \cdots + a_{\blacksquare-1} \cdot n^1 + a_{\blacksquare} \quad (0 \leq a_{\bigcirc} < n)$$

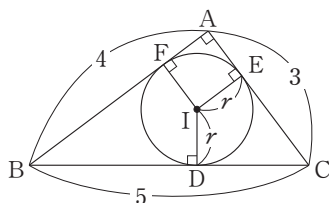
と表すことをイメージして計算しよう。

第5問 図形の性質

▶ 出題のねらい

- 円に関する図形の性質を理解し、使いこなせるか。
- 必要に応じ、チェバの定理、メネラウスの定理を活用することができるか。

▶ 解説



内接円の半径を r とすると、

$$\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r$$

$$r = \underline{1} \quad \text{……ア}$$

四角形 AFIE は正方形だから、

$$AE = AF = 1$$

円外の 1 点から引いた円の接線の長さは等しいから、

$$CD = CE = 3 - 1 = \underline{2} \quad \text{……イ}$$

$$(1) \quad BS = \underline{BP}, \quad CT = \underline{CP} \quad \text{……ウ, エ}$$

$$AS + AT = (AB + BS) + (CT + AC)$$

$$= AB + BP + CP + AC$$

$$= AB + BC + AC$$

$$= 4 + 5 + 3 = 12$$

$AS = AT$ であるから、

$$AS = AT = \underline{6} \quad \text{……オ}$$

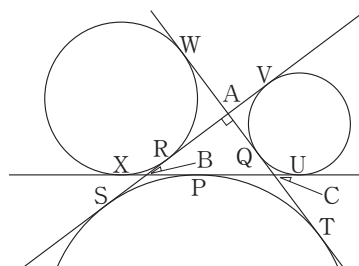
$$BP = BS = AS - AB = 6 - 4 = \underline{2} \quad \text{……カ}$$

同様に、次の図のように接点を U, V, W, X とおくと、

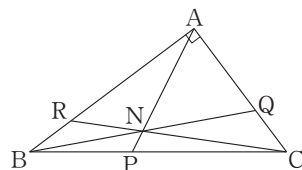
$$BU = BV = 6, \quad CW = CX = 6$$

$$AR = AW = CW - CA = 6 - 3 = \underline{3} \quad \text{……キ}$$

$$CQ = CU = BU - BC = 6 - 5 = \underline{1} \quad \text{……ク}$$



(2)



$\triangle ABQ$ と直線 CR において、メネラウスの定理より

$$\frac{BN}{NQ} \cdot \frac{QC}{CA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{……④} \quad \text{……ケ}$$

$$\frac{BN}{NQ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

$$BN : NQ = \underline{1} : 1 \quad \text{……コ}$$

N は直角三角形 ABQ の斜辺の中点だから、

△ABQ の外心 (……①) ……サ

$$AN=BN=\frac{1}{2}BQ=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{5} \quad \dots\dotsシ$$

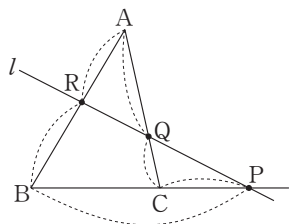
アドバイス

メネラウスの定理・チェバの定理

メネラウスの定理は、

△ABC と、その3 辺およびそれらの延長と交わる直線 l があるとき、交点 P, Q, R が各辺を分ける比についての定理である。下の図において、

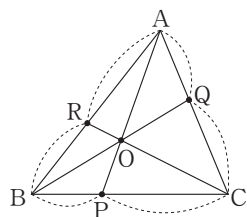
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



チェバの定理は、

△ABC と、その辺およびそれらの延長上にない点 O があるとき、直線 AO, BO, CO と各辺との交点が辺を分ける比についての定理である。下の図において、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



どの三角形に着目し、どのように比をとればよいかに注意して、正しく適用できるよういろいろな図で練習しよう。